APELT

THEORIE

DER INDUCTION

DIE THEORIE DER INDUCTION.

DIE

THEORIE DER INDUCTION

VON

E. F. APELT.

MIT ZWEI FIGUREN UND EINER ZAHLENTAFEL.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1854.

VORWORT.

An die Induction knüpft sich ein doppeltes Interesse: einmal bildet sie die Brücke zwischen der Philosophie und den Naturwissenschaften, das anderemal ist sie der Hauptdifferenzpunkt der deutschen und englischen Philosophie. Während die jetzt in Deutschland herrschende Philosophie die Induction verwirft oder ignorirt, ist es seit Bacon's Zeiten das Bestreben der Engländer und Franzosen gewesen, die Philosophie ausschliesslich auf dem Wege der Induction zu begründen und auszubilden. Eine Annäherung und Ausgleichung wäre hier nur möglich durch eine richtige Theorie der Induction. Derselbe Grund, welcher die philosophische Denkweise der Deutschen und Engländer trennt, hat bei uns auch das Band zwischen der Philosophie und Naturwissenschaft zerrissen. Die Naturwissenschaft hat seit Keppler und Newton ihre grossen Fortschritte durch Induction gemacht. Dagegen hat Leibnitz der deutschen Philosophie die Bahn der rationalistischen Speculation vorgezeichnet und die Macht, welche sein Genius über den Geist und die philosophische Denkweise der deutschen Nation ausübt, hat selbst Kant durch seine Kritik der Vernunft noch nicht zu brechen vermocht. Wir können die Natur der Dinge nicht aus philosophischen Grundsätzen

a priori construiren, sondern wir können philosophische Grundsätze nur auf die Erfahrung anwenden, um den Zusammenhang der empirisch gegebenen Thatsachen zu erklären. Das Causalgesetz gebietet uns, jede Veränderung und jede Begebenheit auf ihre Ursache zurückzuführen und aus dieser zu erklären, aber erst die Theorie der Induction giebt uns die Anleitung dazu, wie wir eine gegebene Wirkung richtig auf ihre Ursache beziehen müssen und wie wir diese Ursache selbst ausfindig machen können, wenn sie noch unbekannt und verborgen ist. Also auch hier ist die Theorie der Induction der Knotenpunkt, in welchem Empirie und Metaphysik zusammenhängen. Aber selbst Whewell, der Geschichtschreiber und Philosoph der Inductionen, gesteht, dass die Logik der Induction noch ein frommer Wunsch sei. Ich hoffe durch die Veröffentlichung der nachfolgenden Untersuchungen etwas zur Erfüllung dieses Wunsches beizutragen.

Schlüsslich fühle ich mich noch gedrungen, dem Herrn Dr. Kronfeld, Lehrer an hiesiger Stadtschule, hier öffentlich meinen Dank auszudrücken. Dieser ausgezeichnet gewandte und sichere Rechner, hat die Güte gehabt, mich bei den weitläufigen Zahlenrechnungen zu unterstützen, deren Ergebnisse sich am Schluss dieser Abhandlung finden, und sich der Mühe unterzogen, diese Rechnungen mit blossen Zahlen ohne alle Logarithmen zu wiederholen und weiter fortzusetzen.

INHALT.

1. Der Schluss.

Der Schluss (Syllogismus) ist die Ableitung eines Urtheils aus anderen Urtheilen. Um schliessen zu können, müssen daher Urtheile gegeben sein, welche man die Prämissen des Schlusses nennt. Das aus diesen abgeleitete Urtheil heisst der Schlusssatz oder die Conclusion. Der Schluss behauptet die Abfolge des Schlusssatzes aus seinen Voraussetzungen oder Prämissen. Die Sätze, aus denen der Schluss besteht d. i. die Prämissen und der Schlusssatz, machen die Materie des Schlusses aus, die Behauptung der Abfolge des Schlusssatzes aus den Prämissen ist die Form des Schlusses oder die Consequenz. Die Prämissen geben die Gründe an, als deren Folge sich der Schlusssatz ergiebt. Der Schluss ist daher ein hypothetisches Urtheil, dessen Vordersätze die Prämissen sind, dessen Nachsatz die Conclusion ist. Darum lässt sich die Form des Schlusses auch auf die Form des hypothetischen Urtheils d. i. auf die Form: „Wenn — so" bringen. Die Abfolge des „So" aus dem „Wenn" d. i. die Abhängigkeit der Folge vom Grunde wird aber im Schluss durch blosses Denken erkannt. Nun giebt es aber keine andere Abhängigkeit einer Folge von ihrem Grunde, welche bloss aus Denkgesetzen begriffen werden könnte, als allein die Abhängigkeit des Besondern vom Allgemeinen, des Theils (der Sphäre) vom Ganzen. Denn diese beruht auf dem *Dictum de omni et nullo*

d. i. auf der Regel: das Merkmal des Merkmals ist auch das Merkmal der Sache (*Nota notæ est nota rei ipsius*) oder: was vom übergeordneten Allgemeinen gilt, das gilt auch vom untergeordneten Besondern. Diese im *Dictum de O. et N.* enthaltene Abhängigkeit des Besondern vom Allgemeinen ist das einzige analytische Verhältniss von Grund und Folge, jedes andere ist synthetisch. Der Schluss ist also ein analytisches hypothetisches Urtheil. Sage ich: „Wenn alle Menschen sterblich sind und Cajus ein Mensch ist; so ist Cajus sterblich;" so fälle ich offenbar ein hypothetisches und zwar ein analytisch-hypothetisches Urtheil. Denn ich trage nach dem *Dictum de O. et N.* den Begriff der „Sterblichkeit" von der Sphäre des Begriffs „Mensch" auf ein Individuum über, das in der Sphäre dieses Begriffs steht; ich wiederhole also im Nachsatz dieses Urtheils einen Gedanken *explicite*, der *implicite* schon im Vordersatz mit enthalten war, und dass er darin lag, deute ich durch den Zwischensatz an: „und wenn Cajus ein Mensch ist." Dieser Zwischensatz ist nöthig, weil der Schluss die Materie des Urtheils ändert. Der Vordersatz nennt „die Menschen" und der Nachsatz „den Cajus" als Subject. „Cajus" ist aber eine ganz andere Vorstellung, als „Mensch." Die erstere ist eine Anschauung, die letztere ein Begriff. Da muss man wissen, in welchem Verhältniss diese beiden Subjecte zu einander stehen und dieses Verhältniss giebt der Zwischensatz an.

Zu einem Schluss gehören wesentlich drei Begriffe (oder Vorstellungen), die sogenannten 3 *Termini:* zwei Subjecte nämlich und eine allgemeine Vorstellung, die von dem einen auf das andere übertragen wird. Denn da der Schlusssatz aus seinen Prämissen folgt, so kann in dem erstern kein Begriff vorkommen, der nicht schon in den letztern enthalten wäre. Die Vorstellungen des Schlusssatzes d. h. das Subject und Prädicat desselben müssen also schon in den Prämissen vorkommen. Zu diesen muss noch ein dritter Begriff kommen, der die Verbindung der beiden Prämissen enthält, indem ihn die beiden Prämissen gemein haben. Man kann daher auch

folgende Erklärung aufstellen: Der Schluss ist ein Urtheil, in welchem ein Subject (der Unterbegriff, *Terminus minor*) vermittelst eines Begriffes (des Mittelbegriffes, *Terminus medius*) einem andern Begriffe (dem Oberbegriff, *Terminus major*) untergeordnet wird.

Der logische Bau des Schlusses oder die Bildung des Schlusses aus seinen drei Begriffen (*Terminis*) besteht darin, dass man das eine Subject in die Sphäre des andern stellt. Denn nur dadurch ist eine Uebertragung des Merkmals oder der allgemeinen Vorstellung von dem einen Subject auf das andere möglich. Der eine von den drei *Terminis*, der Mittelbegriff, muss daher auf doppelte Weise gedacht werden: einmal als Subject und das anderemal als Prädicat.

Jeder Schluss muss daher aus drei Urtheilen bestehen:

1. dem Vordersatz, welcher der Obersatz, *Propositio major*,

2. dem Zwischensatz, welcher der Untersatz, *Propositio minor*, und

3. dem Nachsatz, welcher der Schlusssatz, *Conclusio*, genannt wird.

Im Obersatz wird das Verhältniss des Mittelbegriffs zum Oberbegriff, im Untersatz das Verhältniss des Unterbegriffs zum Mittelbegriff und im Schlusssatz das Verhältniss des Unterbegriffs zum Oberbegriff gedacht. Nennt man den Oberbegriff P, den Mittelbegriff M und den Unterbegriff S, so ist daher die streng logische Form des Schlusses diese:

Obersatz	M ist P
Untersatz	S ist M
Schlusssatz	S ist P

Der Mittelbegriff M ist der Begriff, durch den beide Prämissen verbunden sind (und der im Obersatze als Subject, im Untersatze als Prädicat vorkommt).

Obwohl also der Schluss aus drei Urtheilen besteht, so hat er doch nur drei und nicht vier Begriffe. Das kommt daher, dass ein und derselbe Begriff, nämlich der Mittelbegriff,

an zwei verschiedenen Stellen, das einemal im Subject des Obersatzes und das anderemal im Prädicat des Untersatzes, vorkommt. Wäre der Schluss kein analytisches, sondern ein synthetisches hypothetisches Urtheil, dann müsste er auch vier Begriffe haben, aber damit hörte er auch auf ein Schluss zu sein. *) Die Schlusskraft des Syllogismus beruht also auf der Natur des analytischen hypothetischen Urtheils.

Diese Betrachtung des Schlusses als eines analytischen hypothetischen Urtheils ist keineswegs die in den Handbüchern der Logik gewöhnliche. Sie gehört ursprünglich Fries an. In den logischen Lehrbüchern findet sich meist eine Betrachtung des Schlusses, welche auf den ersten Anblick von der hier gegebenen verschieden scheint, bei näherer Ansicht aber mit derselben übereinstimmt.

Man erklärt den Schluss gewöhnlich als die Erkenntniss von der Bestimmung des Falls durch die Regel. Zu einer solchen Erkenntniss gehören offenbar drei Urtheile: eins, welches die Regel ausspricht, eines, welches den Fall unter die Regel stellt, und eines, welches den Fall durch die Regel bestimmt. Dies vergleicht sich mit dem vorigen so:

Die Regel ist der Obersatz,
die Subsumtion des Falls unter die Regel der Untersatz,
und die Bestimmung des Falls durch die Regel der Schlusssatz.

Diese Erklärung sagt indessen nicht sowohl worin die Natur des Schlusses besteht, als vielmehr wozu der Schluss dient, weshalb sich die logische Form des Schlusses auch nicht so unmittelbar aus ihr entwickeln lässt, wie aus jener. Auch weicht die Erklärung, dass die Regel jedesmal der Obersatz sey bei den disjunctiven Schlüssen von der andern Erklärung ab, dass

*) z. B. der Trugschluss:
Alle Schläger sind gefährliche Menschen
Cajus ist ein Trommelschläger
Cajus ist ein gefährlicher Mensch,
hat nur scheinbar drei, in der That aber vier Begriffe.

der Obersatz das Verhältniss des Mittelbegriffs zum Oberbegriff vorstelle.

Da im Schluss durch die Unterordnung eines Besondern unter ein Allgemeines erkannt wird, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder ist das Allgemeine gegeben und man bestimmt aus demselben das Besondere oder umgekehrt das Besondere ist gegeben und es soll daraus das demselben übergeordnete Allgemeine erkannt werden. Im ersten Falle schliesst man progressiv, im andern regressiv. Das erstere ist jederzeit möglich, das letztere nur in einem besondern Falle, der den eigentlichen Gegenstand dieser Untersuchung bilden wird.

---

2. Arten der Schlüsse.

Es giebt ursprünglich drei Verhältnisse des Denkens im Urtheil: 1. das des Prädicats zum Subject, 2. das des Grundes zur Folge und 3. das der Theile zum Ganzen. Daher giebt es auch drei Arten von Urtheilen, die sich auf diese logischen Verhältnisse gründen: das kategorische, das hypothetische und das divisive Urtheil. Dies setze ich hier aus der Lehre von der logischen Form des Urtheils als bekannt voraus.

Das Wesen des Schlusses besteht in der Unterordnung des Besondern unter das Allgemeine, die dann zur Uebertragung einer logischen Bestimmung gebraucht wird. Die Schlussarten werden sich daher nach dem Verhältniss unterscheiden, nach dem man im Schluss unterordnet. Da es nun drei Verhältnisse der logischen Unterordnung giebt: kategorische Unterordnung des Subjects unter das Prädicat, hypothetische Unterordnung der Folge unter den Grund, divisive Unterordnung der Theile unter ein logisches Ganzes; so giebt es auch drei Arten der Schlüsse: kategorische, hypothetische und divisive. Der kategorische Schluss ordnet vermittelst eines Merkmals von einem Gegenstande (eines Prädicats), der hypothetische

vermittelst eines Grundes und der divisive vermittelst der Theile eines Ganzen unter.

Die Theorie der kategorischen Vernunftschlüsse ist seit Aristoteles von den Logikern mit grosser Ausführlichkeit und Vollständigkeit behandelt worden. Desto kürzer werde ich mich darüber fassen können.

Das Charakteristische des kategorischen Verhältnisses ist das Verhältniss von Subject und Prädicat. In dem kategorischen Schlusse wird ein Prädicat von einem Subjecte auf das andere übertragen und zwar nach dem *Dictum de O. et N.* d. h. das eine Subject steht in der Sphäre des andern. Diese Verstandeshandlung wird in drei Urtheilen ausgesprochen. Das erste Urtheil nennt das Allgemeine, das zweite ordnet das Besondere dem Allgemeinen unter und das dritte bestimmt das Besondere durch das Allgemeine. Da wir nun das erste Urtheil den Obersatz, das zweite den Untersatz nennen, so ist klar, dass der Obersatz eines kategorischen Schlusses stets allgemein, der Untersatz bejahend sein muss. Wäre der Obersatz nicht allgemein, so wüsste man nicht, ob beidemal von demselben Theile der Sphäre des Mittelbegriffs die Rede wäre, also auch nicht, ob überhaupt ein Mittelbegriff da wäre. Wäre der Untersatz nicht bejahend, sondern verneinend, alsdann würde er nicht das Besondere dem Allgemeinen unterordnen, sondern nur zwei Begriffssphären von einander ausschliessen. Gegen die erstere Regel verstösst z. B. der Schluss:

Die Erde hat Bewohner
Der Mond ist eine Erde
Also hat der Mond Bewohner,

dessen Obersatz ein singuläres Urtheil ist.

Zugleich auch gegen die zweite Regel verstösst der Trugschluss:

Eine Katze hat einen Schwanz mehr wie keine Katze
Keine Katze hat zwei Schwänze
———
Also hat eine Katze drei Schwänze.

Die Stellung des Mittelbegriffs in den Prämissen heisst die Figur des Schlusses. Da vier verschiedene Stellungen

des Mittelbegriffs möglich sind, so giebt es vier solcher syllogistischer Figuren. Das zeigt folgendes Schema:

I. Figur	II. Figur
M ist P	P ist M
S ist M	S ist M
S ist P	S ist P

III. Figur	IV. Figur
M ist P	P ist M
M ist S	M ist S
S ist P	S ist P

In der zweiten Figur ist der Obersatz, in der dritten Figur ist der Untersatz, in der vierten Figur sind beide Prämissen umgekehrt.

Verbindet man diese verschiedenen Stellen des Mittelbegriffs mit der bekannten logischen Eintheilung der Urtheile in allgemein bejahende (A), allgemein verneinende (E), besonders bejahende (I) und besonders verneinende (O), so kommt man auf die Lehre von den 19 Modis der vier syllogistischen Figuren.

Die erste Figur ist allein die gesetzmässige und die anderen lassen sich vermittelst eingeschobener Folgerungen auf sie reduciren, weil sich alle Sätze entweder umkehren oder contraponiren lassen. Folgende Beispiele werden dies sofort veranschaulichen:

II. Figur.

Kein endliches Wesen ist heilig
Folglich ist kein heiliges Wesen endlich
Gott ist heilig
Gott ist kein endliches Wesen.

III. Figur.

Alle Menschen sind sterblich
Alle Menschen sind endliche Wesen
Mithin einige endliche Wesen sind Menschen
Einige endliche Wesen sind sterblich.

IV. Figur.

Kein Dreieck ist ein Viereck
Folglich Kein Viereck ist ein Dreieck
Alle Vierecke sind Figuren
folglich Einige Figuren sind Vierecke

also Einige Figuren sind keine Dreiecke.

Da schon Kant in einer besondern Abhandlung, „die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren" erwiesen hat, so erwähne ich dieser Sache hier nur als einer logischen Antiquität.

Es ist logisch von Wichtigkeit hier noch zu bemerken, dass man die Schlussformen nicht nach den relativen Formen ihrer Prämissen unterscheiden darf, sondern nur nach der Art der Unterordnung, aus der jedesmal geschlossen wird. Kiesewetter und andere Logiker haben z. B. Schlüsse von der Form:

Wenn *C* ist, so ist *B*
Wenn *B* ist, so ist *A*

Wenn *C* ist, so ist *A*

schon für hypothetische angesehen. Z. B.

Wenn der Mensch nicht frey ist, so kann er nicht Böses thun
Wenn der Mensch nicht Böses thun kann, so kann er nicht gestraft werden

Wenn der Mensch nicht frey ist, so kann er nicht gestraft werden.

Allein ein solcher Schluss ist kein hypothetischer, sondern ein kategorischer Schluss mit hypothetischen Sätzen. Denn im Schluss selbst liegt ein kategorisches Verhältniss d. i. ein Verhältniss eines Merkmals zu seinem Gegenstande. Ich schliesse nämlich aus der Unfähigkeit des Unfreyen zu bösen Handlungen auf die Straflosigkeit desselben, also von dem einen Merkmale auf das andere, aber diese Merkmale werden hier dem Unfreyen nicht schlechthin d. h. nicht kategorisch, sondern nur unter Bedingung, also hypothetisch beigelegt. Das Hypothetische liegt also hier nicht in der logischen

Form (der Consequenz) des Schlusses, sondern in der Materie desselben d. i. in den Urtheilen, aus denen er besteht.

Diese kategorische Anwendung hypothetischer Regeln ist wesentlich von der echt hypothetischen verschieden. Die Folge, welche das hypothetisch Untergeordnete ist, ist gerade das kategorisch Allgemeinere, denn die Sphäre der Folge ist grösser, als die des Grundes; die Folge kann auch ohne diesen bestimmten Grund vorkommen, der Grund aber hat die Folge immer bei sich.

Was man von der Verwandelung kategorischer und hypothetischer Urtheile sowie kategorischer und hypothetischer Schlüsse in einander gesagt hat, ist eine logische Fabel. Denn jede solche angebliche Verwandlung besteht nur in einer Veränderung des grammatischen Ausdrucks, aber nie in einer wirklichen Veränderung der logischen Form. Hat ein hypothetisches Urtheil im Vorder- und Nachsatz zwei verschiedene Subjecte z. B. „Wenn die Erde sich um die Sonne bewegt, so haben die Fixsterne eine Parallaxe;" so versteht es sich von selbst, dass es niemals in ein kategorisches verwandelt werden kann. Man kann zwar auch hier die hypothetische Form des Urtheils grammatisch maskiren. Anstatt zu sagen: „Wenn der Ostwind weht, so steigt das Barometer," so kann man auch sagen: „Beim Ostwind steigt das Barometer," oder: „Der Ostwind macht das Barometer steigen." Dies sind indessen nur verschiedene Wendungen des Ausdrucks unbeschadet der logischen Form des Urtheils. Das Urtheil selbst bleibt ein hypothetisches, mag man es in dieser oder jener grammatischen Satzform aussprechen. Aber man hat behauptet, dass in jeder hypothetischen Regel, die nur ein Subject habe, die beiden Prädicate in eine kategorische Regel verbunden werden können. Auch diese Behauptung ist nicht richtig. Sie hat ihren Grund in der Nichtbeachtung eines Unterschieds, der bei den hypothetischen Urtheilen vorkommt. Sage ich z. B. „Wenn Cajus tugendhaft ist, so redet er die Wahrheit," so ist bloss das Prädicat des Vordersatzes der Grund. Ich kann daher für den Cajus auch ein anderes Subject nennen und sagen: „Wenn Jemand tugendhaft ist, so

redet er die Wahrheit" oder: „Alle Tugendhaften reden die Wahrheit." Das kommt daher, dass die hypothetischen Urtheile, welche einen allgemeinen Vordersatz und im Nachsatz dasselbe Subject haben wie im Vordersatz, eigentlich kategorische allgemeine Regeln sind. Besondere oder einzelne Urtheile der Art sind daher eigentlich nur grammatisch zusammengezogene analytisch-hypothetische Urtheile d. h. Schlüsse, wie das angeführte Beispiel: Wenn Alle Tugendhaften die Wahrheit reden und Cajus tugendhaft ist, so redet er die Wahrheit. Sage ich dagegen: „Wenn Cajus frei von Geschäften ist, so dichtet er," alsdann ist die Verbindung des Subjects mit dem Prädicat d. i. der ganze Vordersatz und nicht nur sein Prädicat der Grund. Der Grund liegt in einer Eigenthümlichkeit des Subjects, und das Urtheil ist wahrhaft ein (synthetisches) hypothetisches Urtheil, das sich niemals in ein kategorisches verwandeln lässt. Daraus ergiebt sich ganz einfach die richtige Ansicht über die angebliche Verwandelung kategorischer Schlüsse in hypothetische. Anstatt der gewöhnlichen Form:

Alle *M* sind *P*
S ist *M*
———
S ist *P*

kann man nämlich auch sagen:

Wenn ein Ding *M* ist, so ist es *P*
S ist *M*
———
S ist *P*

Dies ist jedoch keine Verwandelung des kategorischen Schlusses in einen hypothetischen, sondern nur Veränderung der Form des Obersatzes; denn die Unterordnung *S* ist *M* bleibt immer kategorisch, es wird nicht der Grund schlechthin behauptet, sondern nur die Unterordnung des Subjects *S* unter das Prädicat *M*.

Der kategorische Schluss schliesst immer von einem Merkmal eines Dinges auf ein anderes Merkmal desselben z. B. Weil Cajus ein Mensch ist, so ist er auch sterblich. Der hypothetische Schluss dagegen schliesst von der Giltigkeit einer Behauptung auf die Giltigkeit einer andern Behauptung,

von der Giltigkeit des Grundes auf die Giltigkeit der Folge. Hier gelten die beiden Regeln:

1. Wenn der Grund gesetzt ist, so ist auch die Folge gesetzt. Dies ist nichts anderes, als das *Dictum de Omni et Nullo* angewendet auf den hypothetischen Fall der Abhängigkeit der Folge vom Grunde. Die Assertion der Folge liegt nothwendig in der Assertion des Grundes.

2. Wenn die Folge aufgehoben ist, so ist auch der Grund aufgehoben. Dies folgt vermöge der Contraposition aus dem erstern.

Nach der erstern Regel schliesst man positiv von dem Dasein des Grundes auf das Dasein der Folge. Dies heisst der *Modus ponens*. Nach der zweiten Regel schliesst man negativ von der Nichtigkeit der Folge auf die Nichtigkeit des Grundes. Dies heisst der *Modus tollens*.

So erhält man die beiden Figuren der hypothetischen Schlüsse

I. Modus ponens

Wenn A gilt, so gilt B.
A gilt
also gilt B

II. Modus tollens

Wenn A gilt, so gilt B
B gilt nicht
also gilt auch A nicht.

Bejahend kann man von der Folge auf den Grund nicht schliessen, weil die Folge im Allgemeinen von verschiedenen Gründen abhängen kann.

Diese hypothetische Schlussart ist von der kategorischen wesentlich verschieden. Der kategorische Schluss bildet im Schlusssatz ein neues Urtheil. Der hypothetische Schluss ändert nur die Modalität des Vorder- und Nachsatzes der hypothetischen Regel. Der Schlusssatz des hypothetischen Schlusses wiederholt nämlich nur assertorisch in der ersten Figur den Nachsatz, in der zweiten Figur den Vordersatz der

hypothetischen Regel, in welcher letzteren beide Sätze nur problematisch gedacht waren.

Der hypothetische Schlusssatz ist immer assertorisch. Der Schlusssatz eines kategorischen Schlusses für sich ist hingegen immer nur problematisch. Denn der kategorische Schluss behauptet nicht seine Prämissen, sondern seine Consequenz. Wenn demohnerachtet beim Gebrauch dieser Schlussart die Prämissen nicht bloss problematisch gedacht werden, sondern assertorisch gewiss gelten, so liegt der Grund davon nicht in der logischen Form des Schlusses, sondern in der Natur und dem Ursprung der Urtheile, aus denen geschlossen wird.

Das Wesen der hypothetischen Schlüsse besteht also in der Assertion. Man geht hier von der Gewissheit einer Grundbehauptung aus und verbreitet sich nach und nach über ihre Folgen. So schliesst die Mathematik aus ihren Axiomen. Z. B.

Durch zwei Punkte geht nur Eine gerade Linie
Wenn durch zwei Punkte nur Eine Gerade geht, so ist durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ein und nur ein Dreieck bestimmt

---

durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein und nur ein Dreieck bestimmt.

Der Lehrsatz (das Theorema) wird hier vermittelst der hypothetischen Unterordnung aus dem Axiom abgeleitet. Die hypothetische Regel selbst d. i. die Abhängigkeit der Folge vom Grunde wird aber nicht erschlossen, sondern durch Construction der Begriffe in reiner Anschauung demonstrirt: sie muss also für den Schluss schon gegeben sein. Dies ist für diese Schlussart charakteristisch.

Gewöhnlich nennt man die hypothetische Regel den Obersatz und die Assertion des Grundes den Untersatz. In der That sind aber die Functionen, wie schon vorstehendes Beispiel zeigt, gerade die umgekehrten und streng richtig steht die logische Form der hypothetischen Schlussart so:

Obersatz: A gilt
Untersatz: Wenn A gilt so gilt B

Schlusssatz: B gilt.

Dies wird sogleich einleuchtend, wenn man auf die 3 *Termini* und ihre Stelle im Schlusse achtet. Denn obwohl anscheinend nur zwei Begriffe A und B (der Grund und die Folge) genannt werden, so sind in der That doch drei Begriffe vorhanden:

die Assertion ist der Oberbegriff,
der Grund ist der Mittelbegriff,
die Folge ist der Unterbegriff.

Die hypothetische Regel ordnet die Folge vermittelst des Grundes der Assertion unter, sie hat also die unterordnende Function des Untersatzes. Demgemäss enthält sie auch die Verbindung des Mittelbegriffs mit dem Unterbegriff; während die Assertion des Grundes den Oberbegriff mit dem Mittelbegriff verbindet, was gerade der wesentliche Charakter des Obersatzes ist.

Da durch die Conjunctionen: „Weil," „Denn" und ähnliche die Assertion des Grundes mit der Behauptung der Abhängigkeit des Bedingten von seiner Bedingung grammatisch zusammengezogen werden kann, so verbirgt sich diese Schlussart vielfach in den Wendungen der Sprache. Darin mag wohl hauptsächlich der Grund liegen, dass sie sich der Beachtung des Aristoteles entzogen hat.

Es giebt noch eine besondere Art hypothetischer Schlüsse mit disjunctivem Obersatz, welche die meisten Logiker fälschlich als disjunctive Schlüsse bezeichnet haben. Ist nämlich eine disjunctive Regel gegeben, so folgt aus der Behauptung (Affirmation) eines Eintheilungsgliedes die Verneinung (Negation) aller übrigen und aus der Negation aller bis auf eines, die Affirmation dieses einen. So bilden sich folgende zwei Schlussarten

1. Modus ponendo tollens:

Jedes Dreieck ist entweder rechtwinklig oder spitzwinklig oder stumpfwinklig.
Dieses Dreieck ist rechtwinklig

Also weder spitz- noch stumpfwinklig.

2. Modus tollendo ponens:

Jedes Dreieck ist entweder rechtwinklig oder spitzwinklig oder stumpfwinklig.
Dieses Dreieck ist weder spitzwinklig noch stumpfwinklig

Also ist es rechtwinklig.

So beweisst z. B. die Geometrie den Congruenzfall, bei welchem die beiden Dreiecke lauter gleiche Seiten haben.

Hierher gehört als ein singulärer Fall die sogenannte apagogische oder indirecte Beweisart, bei welcher man erst die Falschheit des Gegentheils einer Behauptung darthut und daraus ihre Wahrheit folgert. Diese Beweisart schliesst durch den *Modus tollendo ponens*. Dabei ist aber nothwendig, dass die Disjunction bloss zweitheilig ist, weil sonst kein contradictorischer, sondern ein bloss conträrer Gegensatz der Urtheile stattfindet. Der Beweis erfordert daher noch eine Rechtfertigung der contradictorischen (widersprechenden) Entgegensetzung selbst. Denn sowie ein Glied der Eintheilung unbekannt bleibt oder übersehen wird, so wird durch die Disjunction der zu beweisenden Behauptung kein Gegentheil gesetzt, der Beweis verliert also alle Schlusskraft. Auch kann sie in der Regel nicht da angewendet werden, wo man bloss logisch nach einem Begriff und dessen Gegentheil, nach *A* und *Non-A* eintheilt, sondern nur in einer synthetischen Erkenntnissweise, welche eine Disjunction affirmativer Gegensätze zulässt, wie die reine Anschauung der Mathematik. Z. B. wenn eine Linie weder grösser noch kleiner ist als die andere, so ist sie ihr gleich. Hier ist die Gleichheit beider Linien bewiesen, wenn gezeigt werden kann, die beiden Voraussetzungen, dass die eine entweder grösser oder kleiner sei, widerstreiten schon bekannten Wahrheiten. Hat man dagegen die bloss logische Disjunction: diese Linie ist entweder *A* oder *Non-A*, so muss das eine oder das andere direct bewiesen werden.

Diese Schlüsse dürfen nicht mit den divisiven Schlüssen verwechselt werden. Denn die letztern haben es mit der Verbindung der Theile zum Ganzen, diese hier mit der Entgegensetzung der Theile im Ganzen zu thun. Dort setzen

wir den Inbegriff aller Theile dem Ganzen gleich, hier vergleichen wir nur Theil mit Theil im Ganzen und diese Vergleichung beruht auf den hypothetischen Verhältnissen der Eintheilungsglieder unter einander durch ihre gegenseitige Ausschliessung. Die Schlusskraft dieser Schlüsse beruht in der That auch nur darauf, dass man in Gedanken durch eine unmittelbare Folgerung aus der gegebenen disjunctiven Regel eine hypothetische zieht und aus dieser schliesst. So in dem angeführten Beispiel:

Alle Dreiecke sind entweder rechtwinklig oder spitzwinklig oder stumpfwinklig.
Also: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist es weder spitzwinklig noch stumpfwinklig
Dieses Dreieck ist rechtwinklig

Also ist es weder spitz- noch stumpfwinklig.

Die dritte Schlussart ist die divisive vermittelst des Verhältnisses der Form eines Ganzen zu der Allheit seiner Theile. Das **reelle Ganze** besteht aus der Zusammensetzung oder aus der Wechselwirkung seiner Theile. Soll aber ein solches in der Wirklichkeit gegebenes Ganzes denkend aufgefasst und bestimmt werden, so muss daraus erst ein **logisches Ganzes** d. i. der Inhalt oder Umfang eines Begriffes gebildet werden. Dadurch zerfallen die divisiven Urtheile in zwei Klassen: in **conjunctive** und **disjunctive**. Die erstern setzen den **Inhalt** eines Begriffes aus dem Inbegriff seiner wesentlichen Merkmale zusammen, die letztern geben die Eintheilungsglieder an, die den **Umfang** eines Begriffes ausfüllen. Zufolge dieses Unterschieds sind die divisiven Schlüsse entweder conjunctive oder disjunctive.

Der **conjunctive** Schluss schliesst nach der Regel: **Wovon alle Merkmale eines Begriffes gelten, das gehört in die Sphäre dieses Begriffes, wovon aber nur eines dieser Merkmale nicht gilt, das gehört auch nicht unter diesen Begriff.**

So schliesst der Botaniker, wenn er eine Pflanze, der Mineralog, wenn er ein Mineral, der Zoolog, wenn er ein Thier

bestimmt. Der Obersatz eines solchen Schlusses ist jederzeit eine Begriffserklärung und er bedarf daher keiner Bezeichnung seines Subjects, denn die Quantität des Satzes liegt hier nicht in der Sphäre seines Subjectbegriffes, sondern in der Vielheit der Merkmale, aus denen dieser Begriff zusammengesetzt ist.

Divisive Urtheile können sowohl unter kategorischer wie unter hypothetischer Form vorkommen.

Hypothetische Conjunctionen geben eine Uebersicht aller Gründe über eine Folge. Hier werden die Sätze, welche das logische Ganze der Bedingungen enthalten, der Folge übergeordnet. Z. B. Wenn der Mond in Opposition mit der Sonne kommt und diese Opposition nahe genug an die Knoten der Mondsbahn fällt, so giebt es eine Mondfinsterniss.

Die hypothetische Disjunction dagegen giebt eine Uebersicht der Folgen unter einem allgemeinen Grunde, z. B. Wenn der Mond die gerade Linie zwischen Erde und Sonne durchschneidet, so entsteht entweder eine Mondfinsterniss oder Sonnenfinsterniss.

Nach der erstern, der conjunctiven Regel, bestimme ich in einem conjunctiven Schluss den Zeitpunkt einer Mondfinsterniss d. i. einen bestimmten einzelnen Fall, dessen Eintritt oder Aussenbleiben von jenen Bedingungen abhängt.

Die Verschiedenheit des hypothetischen Schlusses von diesem conjunctiven Schluss unter hypothetischer Form springt sofort in die Augen. Im hypothetischen Schluss kann man nur einseitig *modo ponente* vom Grund auf die Folge, oder *modo tollente* von der Folge auf den Grund schliessen. Hier dagegen, wo ich von der Allheit der vorhandenen Gründe auf das Dasein der Folge schliesse, findet eine Wechselseitigkeit Statt, welche beim hypothetischen Schluss nicht da ist und der zufolge sowohl bejahend als verneinend vom Grund auf die Folge und von der Folge auf den Grund geschlossen werden kann. Ist z. B. die Oppositionszeit des Mondes und der Ort des Mondsknoten zu dieser Zeit gegeben, so lässt sich daraus bestimmen, ob eine Mondfinsterniss eintreten wird oder nicht; und umgekehrt, wenn Zeit und Ort der Mondfinsterniss gegeben ist, so ist dadurch auch die

Oppositionszeit des Mondes sowie der Ort des Mondsknoten bestimmt.

Der disjunctive Schluss endlich ist die Induction. Die logische Form der Induction ist daher nichts anderes als die Form des disjunctiven Vernunftschlusses.

3. Die logische Form der Induction.

Die Induction oder der disjunctive Schluss kommt, sowie der conjunctive, ebensowohl unter kategorischer wie unter hypothetischer Form vor. Ihre Regeln sind:

1. für die kategorische Form: Was von den Theilen einer Sphäre gilt, das gilt auch von dem Begriff selbst, in dessen Sphäre diese Theile stehen und

2. für die hypothetische Form: Wenn alle Folgen eines Grundes Statt finden, so findet dieser selbst Statt; findet hingegen nur eine nicht Statt, so findet auch der Grund nicht Statt.

Um die logische Form der Induction mit möglichster Anschaulichkeit darzustellen, werde ich sie an Beispielen erörtern. Eine Induction, also ein Schluss aus einer disjunctiven Regel ist z. B. dieser:

Obersatz: Das Sonnensystem besteht aus der Sonne und den Planeten: Merkur, Venus, Erde, Mars, den Asteroiden, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.

Untersätze: Merkur bewegt sich von Abend gegen Morgen um die Sonne.
Venus bewegt sich in derselben Richtung um die Sonne u. s. w.

Schlusssatz: Alle Planeten bewegen sich von Abend gegen Morgen um die Sonne.

Der Obersatz dieses Schlusses giebt die Glieder des Planetensystems d. i. die Theile des Ganzen an, er ist also eine

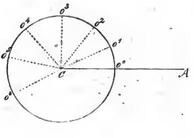
Eintheilung, ein disjunctives Urtheil. Die Untersätze bringen ein neues Merkmal aus der Erfahrung hinzu und verbinden dies mit jedem einzelnen Theile oder Gliede des Ganzen. Das Subject des Untersatzes, oder, um es genauer auszudrücken, die Subjecte der Untersätze sind also bereits durch den Obersatz gegeben und es wird mit jedem solchen Subject an der Stelle des Untersatzes ein Prädicat verbunden, das erst empirisch aufgesucht werden muss. Dies ist im kategorischen Schluss wesentlich anders. Der kategorische Schluss bringt in seinem Untersatz stets einen neuen Gegenstand, ein neues Subject, der inductorische Schluss dagegen bringt in seinen Untersätzen immer ein neues Merkmal, ein neues Prädicat zu dem Obersatz hinzu, z. B. hier das Merkmal „der Bewegung um die Sonne in der Richtung von Abend gegen Morgen.“ Dort kann daher der Untersatz auch analytisch sein d. i. das Prädicat desselben kann schon in dem Begriff des Subjectes liegen und durch blosse (logische) Zergliederung gefunden werden. Hier dagegen ist der Untersatz stets ein synthetisches Urtheil, dessen Prädicat in dem Begriffe des Subjects noch nicht enthalten ist, sondern als etwas völlig Neues hinzukommt. Der Schlusssatz endlich sammelt alle die einzelnen Urtheile, welche an der Stelle des Untersatzes stehen, zu einer Regel. Das ist das Merkwürdige dieser Schlussart, dass der Schlusssatz niemals ein singuläres oder besonderes, sondern stets ein allgemeines Urtheil ist. Der kategorische Schluss schliesst aus einer Regel auf einen Fall, der disjunctive dagegen aus den Fällen auf die Regel. Dort ist die Regel das Vorausgesetzte, hier das Erschlossene. Kategorisch kann man nur theilweis, hypothetisch nur verneinend (*modo tollente*) vom Besondern aufs Allgemeine schliessen. Die disjunctive Schlussart ist die einzige, welche gestattet, bejahend und allgemein zugleich vom Besondern aufs Allgemeine zu schliessen. Darin liegt die Zaubermacht der Induction: sie lässt uns aus der Zusammenstellung der Beobachtungen und Thatsachen das Gesetz erkennen.

Beachten wir noch die drei *Termini* und ihre Stellung im

Schluss. Das Subject des Obersatzes nennt ein Ganzes und das Prädicat desselben den Inbegriff der Theile, welche das Ganze ausmachen. Dieses Ganze wird im Schlusssatz durch ein neues Prädicat bestimmt, welches durch die Untersätze hinzukommt. Dieses Prädicat ist der Oberbegriff, das Ganze, welches im Subject des Schlusssatzes dadurch bestimmt wird, der Unterbegriff und die Theile oder Glieder des Ganzen sind der Mittelbegriff, denn vermittelst derselben kann erst das Merkmal auf das Ganze übertragen werden. Bei der Induction wird also ein ganz neuer Oberbegriff durch die sogenannten Untersätze hinzugebracht und im Schlusssatz daraus eine neue Regel gebildet, die in den Prämissen nicht vorkam. Der Mittelbegriff hat offenbar hier eine ganz andere Natur, als in den beiden andern Schlussarten. Im kategorischen Schluss ist der Mittelbegriff schlechthin ein Prädicat d. i. ein Merkmal von Gegenständen, im hypothetischen ein Grund, im disjunctiven ein divisiv aus seinen Theilen vollständig gebildetes Ganzes, und ihrer logischen Form nach beruht die Schlusskraft dieser Schlüsse auf der Verbindung der Theile zum Ganzen.

Diese hier erörterte Form des disjunctiven Vernunftschlusses ist, wie ich sogleich zeigen werde, genau die logische Form jener merkwürdigen und klassischen Induction, durch welche Keppler die wahre Figur der Marsbahn entdeckte und welche stets als Muster und Vorbild des inductorischen Verfahrens in der Naturforschung gegolten hat.

Gesetzt der Körper O bewege sich in der Ebene des Papiers um den ruhenden Körper C und ich könnte bei jeder Lage des bewegten Körpers O gegen den ruhenden C die Entfernung des erstern von dem letztern messen. Die jedesmalige Lage des Körpers O in Bezug auf C wird aber bekannt sein,



wenn der Winkel $ACO_1 = v_1$, $ACO_2 = v_2$ u. s. f., den der Radius Vector oder der Leitstrahl mit der festen durch C gehenden Geraden AC macht, gegeben ist. Gesetzt ferner, ich hätte für eine Reihe von Oertern des bewegten Körpers: O_1, O_2, O_3 . . . . . O_n die Entfernungen CO_1, CO_2, CO_3 u. s. f. gemessen und diese Entfernungen

für $O_1 = a$
,, $O_2 = a$
,, $O_3 = a$
.
.
.
$O_n = a$

gefunden, so hätte ich folgende Induction:

Die Oerter O_1, O_2, O_3 . . . O_n liegen auf der Bahn, welche der Körper O um C beschreibt.

Der Ort O_1 liegt von C in der Entfernung a
,, ,, O_2 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, a
,, ,, O_3 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, a
.
.
.
,, ,, O_n ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, a

Alle diese Oerter liegen in gleicher Entfernung vom ruhenden Körper,

Also ist die Bahn, welche O um C beschreibt, ein Kreis.

Das, was mir hier die Beobachtung zeigt, ist nicht nur die Grösse jeder einzelnen Entfernung, sondern die Gleichheit aller dieser Grössen.

Es ist dies offenbar der einfachste Fall der Art. Ungleich schwieriger wäre die Aufgabe, wenn die Entfernung oder die Grösse des Radius Vector für jedes O eine andere wäre und nicht constant bliebe. In diesem Fall befand sich Keppler. An jedem Marsort hatte der Radius Vector, d. i. die Entfernung des Mars von der Sonne, eine andere Grösse. Das Verhältniss der Werthe der Entfernungen zu einander entzog sich hier der unmittelbaren Wahrnehmung und musste erst aus seiner Verborgenheit herausgezogen und künstlich zur Anschauung gebracht werden.

Eine andere Schwierigkeit lag für Keppler darin, dass die Entfernungen des Mars von der Sonne selbst nicht unmittelbar, sondern nur künstlich gemessen werden konnten und dass er sich die Kunst dieser Messungen erst erfinden musste.

Beim Kreis bleibt der Radius während der Drehung constant. Verändert sich aber der Radius während der Drehung, so kommt Alles darauf an, das Gesetz zu entdecken, nach welchem die Grösse des Radius Vector von O_p zu O_r d. i. mit der wahren Anomalie sich verändert. Ohne eine solches Gesetz würde es keinen Zusammenhang zwischen den einzelnen Werthen der Radii Vectores geben, es würde die Schnur fehlen, an welche die Perlen der einzelnen Fälle anzureihen sind. Dies Gesetz der Veränderung der Grösse des Radius Vector während seiner Drehung wird durch die Polargleichung einer Curve ausgedrückt. Auf eine solche Polargleichung, oder, was dasselbe ist, auf einen mathematischen Stellvertreter derselben, muss also hier die Induction zu kommen suchen.

Der mathematische Theil dieser Aufgabe lässt sich allgemein so ausdrücken: die Beobachtung und Messung giebt mir für

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_n$$

die zugehörigen Werthe

$$y_1 , y_2 , y_3 \ldots\ldots y_n$$

es wird gesucht: $y = \varphi (x)$ d. i. die Form der Function.

Die Kunst besteht also hier darin, aus einer Reihe numerischer Werthe zweier zusammengehöriger veränderlicher Grössen das Gesetz ihrer Abhängigkeit von einander d. i. die Functionsform zu errathen. Hierin besteht die grosse Schwierigkeit dieser Aufgabe, worüber ich auf das Schlusscapitel verweise.

Die logische Form der Keppler'schen Induction ist demnach diese:

Die Marsbahn enthält in sich die Marsörter

$$O_1 , O_2 , O_3 \ldots . O_n$$

An dem Orte O_1, d. i. zur Zeit der wahren Anomalie des Mars v_1, ist die Grösse seines Radius Vector r_1

,, ,, ,, v_2 ,, ,, ,, ,, r_2

,, ,, ,, v_3 ,, ,, ,, ,, r_3

.

.

,, ,, ,, v_n ,, ,, ,, ,, r_n

Die Marsbahn ist eine Curve, für welche $r = \varphi\,(v)$ d. i. deren Polargleichung: $r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 - e \cos v}$ ist.

$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 - e \cos v}$ ist aber die Polargleichung der Ellipse.

Die Marsbahn ist also eine Ellipse, in deren Einem Brennpunkt die Sonne steht.

Da zu Keppler's Zeiten die analytische Geometrie noch nicht vorhanden, die Polargleichung der Kegelschnitte ihm also noch unbekannt war, so stellt er jenes Gesetz der Veränderung des Radius Vectors während seiner Drehung nicht analytisch durch eine Gleichung, sondern synthetisch durch eine geometrische Construction dar.*) Dies ändert jedoch

*) Keppler construirt eigentlich nicht die Polargleichung der Ellipse selbst, sondern an deren Statt die Gleichung

$$r = a\,(1 + e \cos E)$$

in welcher r der Radius Vector, a die grosse Halbaxe, e die Excentricität und E die excentrische Anomalie ist. Da aber diese Gleichung aus der Polargleichung der Ellipse sofort folgt, wenn man für die wahre Anomalie v die excentrische Anomalie E einführt, so macht dies im Wesen der Sache keinen Unterschied. Für unsre gegenwärtige Untersuchung ist es aber von besonderer Wichtigkeit, den Punkt genau ins Auge zu fassen, wo sich Geometrie und Empirie begegnen, und das ist eben diese Construction. Die Gleichung $r = a\,(1 + e \cos E)$, auf welche Keppler kommt und die er construirt, geht nämlich einerseits aus der Vergleichung der Werthe von $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ für $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ d. i. aus den empirisch gegebenen numerischen Werthen (den Beobachtungsgrössen) hervor, andererseits folgt sie aber auch aus der Polargleichung der Ellipse, sie ist also für Keppler der Coincidenzpunkt der Geometrie mit der Empirie. Diejenigen, die sich über die Einzelnheiten in dem Gange der Keppler'schen Induction genauer unterrichten wollen, verweise ich auf meine Epochen der Geschichte der Menschheit Bd. 1. S. 402 – 415, meine

nichts an der logischen Form seiner Induction. In dieser Induction nun ist

der Oberbegriff: Ellipse,

der Unterbegriff: die Marsbahn

und der Mittelbegriff die durch Beobachtung gegebenen d. i. empirischen Oerter, vermittelst welcher Keppler auf den geometrischen Ort d. i. die Ellipse kommt.

Der Mittelbegriff verschwindet auch hier im Schlusssatz und er dient nur zur Verbindung der beiden Prämissen, weshalb er in diesen auch zweimal vorkommt, das einmal im Obersatz, das anderemal an der Stelle des Untersatzes.

Die Polargleichung der Ellipse ist *a priori* bekannt, aber dass der Radius Vector des Mars während seiner Drehung um die Sonne sich wirklich so verändert wie der Radius Vector der Ellipse sich verändern muss — das war es, was Keppler erst inductorisch fand. Keppler kam also vermittelst der Geometrie der Kegelschnitte zu dem Oberbegriff (Ellipse) seiner Induction.

Die Induction unter hypothetischer Form schliesst von der Allheit (oder wenn sie unvollständig ist von der Vielheit) der Folgen auf das Dasein des Grundes und von der Nichtigkeit Einer Folge auf die Nichtigkeit des Grundes. Das glänzendste Beispiel dafür in der Geschichte der inductiven Wissenschaften ist die astronomische Induction Newtons. Die logische Form derselben lässt sich so darstellen:

Die Planeten bewegen sich nach den drei Kepplerschen Gesetzen um die Sonne: 1. der Radius Vector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume; 2. die Figur der Planetenbahn ist eine Ellipse, in deren Einem Brennpunkte die Sonne steht; 3. die Quadrate der siderischen Umlaufszeiten verhalten sich wie die Würfel der mittlern Entfernungen.	Obersatz.

Schrift über Keppler's Weltansicht, S. 45—70, meine Reformation der Sternkunde, S. 313—319 und auf das letzte Capitel dieser Schrift.

<table>
<tr><td>Das erste Gesetz, das der Gleichheit der Flächenräume mit den Zeiten, zeigt an, dass die Centralkraft, welche den Planeten stetig von der Tangente seiner Bahn abbiegt, ihren Sitz in der Sonne hat.
Das zweite lässt erkennen, dass diese Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkt.
Das dritte endlich giebt zu erkennen, dass dies Gesetz der Wirksamkeit der Kraft nicht bloss im Umlauf des einzelnen Planeten, sondern von Bahn zu Bahn gilt.</td><td>Untersätze.</td></tr>
<tr><td>Die Planeten werden von einer Kraft der Sonne angezogen, die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt.</td><td>Schlusssatz.</td></tr>
</table>

Hier ist:

die Planetenbewegung — das Phänomen — der Unterbegriff,
die drei Gesetze Kepplers — die Folgen — der Mittelbegriff,
die Gravitation — der Grund — der Oberbegriff.

Ein Phänomen wird hier durch den Schluss als Folge eines Grundes erkannt. Man wird aus dem gegebenen Beispiel bemerken, dass der Schluss von der Wirkung auf die Ursache seiner logischen Natur nach nichts anderes ist, als eine Induction unter hypothetischer Form. Dies tritt am schärfsten bei dem Untersatz No. 2 hervor. Denn die Figur der Bahn ist die Wirkung und das Gesetz, nach welchem die Centralkraft den Körper von der Tangente seiner Bahn stetig ablenkt, ist die Ursache, welche jene Figur der Bahn (als ihre Wirkung) erzeugt. Hier zeigt sich nun ein bemerkenswerther Zusammenhang dieses Schlusses von der Wirkung auf die Ursache mit der Analysis des Unendlichen. Die Analysis des Unendlichen enthüllt das Gesetz der Wirksamkeit der Kraft (d. i. der Ursache), welches in der Figur der Bahn (der Wirkung) verborgen liegt, sie offenbart das Geheimniss des Zusammenhangs zwischen Ursache und Wirkung. Dies liegt im Wesen dieser Rechnungsart.

Man kann die Quadratur einer krummen Linie als das allgemeine Schema aller Aufgaben betrachten, die in den Kreis der Integralrechnung fallen. Eine solche von einer Curve begrenzte Fläche kann man sich entweder als aus gleichartigen Flächentheilen zusammengesetzt denken oder man lässt sie durch stetige Bewegung einer Ordinate entstehen, die mit sich selbst parallel auf der Abscissenaxe fortrückt, während ihr Endpunkt auf ihr selbst stetig auf- und absteigt und so die begrenzende Curve erzeugt. In diesem Falle entsteht die Fläche durch stetige Orts- und Grössen-Veränderung einer Geraden, also einer mit ihr ungleichartigen Grösse. Denkt man sich nun die Zeit auf der Abscissenaxe ausgedehnt, die variabele Ordinate als Bild einer veränderlichen Ursache und die während einer bestimmten Zeit hervorgebrachte Wirkung als die überstrichene Fläche, so hat man das geometrische Problem in ein mechanisches verwandelt, das sich so ausdrücken lässt: was ist der Totaleffect einer Ursache, welche eine gewisse Zeit lang wirksam gewesen ist, vorausgesetzt, dass man entweder, wenn die Intensität der Ursache während jener Zeit constant bleibt, diese Intensität selbst kennt, oder, wenn sich die Intensität mit der Zeit ändert, ihren anfänglichen Grad und das Gesetz ihrer Aenderung weiss. Das Gesetz, nach dem die Ursache wirkt oder ihre Intensität mit der Zeit ändert, d. i. das Gesetz, nach welchem der Endpunkt der Ordinate während ihres Fortrückens auf der Abscissenaxe stetig auf- und niedersteigt, ist in der Gleichung der Curve oder in der Form der Function $y = \varphi(x)$ enthalten; dem anfänglichen Grade der Intensität der wirkenden Ursache entspricht aber die Grenzordinate, welcher Grenzwerth bekanntlich durch den Differentialquotienten ausgedrückt wird. Differentialquotient und Integral verhalten sich daher zu einander wie Ursache und Wirkung und sind wie diese ungleichartig oder in der Sprache der Mathematik ausgedrückt: der Differentialquotient ist stets um eine Dimension niedriger, als die ursprüngliche Function. *)

*) Ich verweise über diesen Gegenstand auf Schlömilch's Hand-

Wenn man daher in der Physik oder Mechanik von der gegebenen Wirkung auf die Ursache geht, so hat man es mit einer Aufgabe der Differentialrechnung zu thun. Wenn dagegen die Ursache gegeben ist und man sucht die Wirkung derselben, so bekommt man eine Aufgabe der Integralrechnung. Stellt man z. B. die Aufgabe, die Gleichung einer Curve aus dem Gesetz der Richtungsveränderung und der momentanen Lage der Tangente zu finden, giebt man also den Winkel, welchen die Tangente an den Punkt (x, y) mit der Abscissenaxe macht, als Function von x an und sucht daraus die Relation zwischen x und y, so hat man es mit einer Integration zu thun. Will man dagegen umgekehrt aus einer gegebenen Curve das Gesetz der Richtungsveränderung, welches ihrer Entstehung zu Grunde liegt, ableiten, so bedarf es nur einer Differentiation. Denn der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist nichts anderes, als die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine im Punkte (x, y) berührende Gerade mit der Abscisse der x macht: er giebt also die momentane Intensität der erzeugenden Grösse an. Die inductive Aufgabe Newtons: aus der gegebenen Figur der Bahn das Gesetz der Centralkraft zu finden, war demnach gleichfalls eine Aufgabe der Differentialrechnung. Die umgekehrte, deductive Aufgabe dagegen, aus dem bekannten Gesetz der Kraft die Bahn zu finden, gehörte in das Gebiet der Integralrechnung. Eben dahin gehören aus demselben Grunde alle astronomischen Störungsrechnungen. *)

---

buch der Differential- und Integralrechnung. 1 Theil. S. 1—14, u. S. 15—19, wo die Metaphysik dieses Calculs und ihr Zusammenhang mit dem Mechanismus des Algorithmus mit grosser Klarheit, Einfachheit und Eleganz entwickelt ist.

*) Da die Integralrechnung nichts anderes ist, als eine Methode, von einem selbst unendlich kleinen Theile auf das Ganze zu schliessen, und da die Induction gleichfalls der Schluss von den Theilen auf das Ganze ist, so könnte man dadurch veranlasst werden zu glauben, die inductorische Erforschung einer verborgenen Ursache oder einer noch unkannten Kraft sei eine Aufgabe der Integralrechnung. Allein dies ist, wie man aus Obigem ersieht, nicht richtig.

Wo bekommt nun Newton den Oberbegriff seiner Induction, den Begriff des Grundes (oder der Ursache) her? Der Begriff der Gravitation oder der Anziehungskraft der Sonne ist kein geometrischer, sondern ein physikalischer oder vielmehr mechanischer Begriff, und wenn man dem Zusammenhange der Gedanken in Newtons unsterblichem Werke mit Aufmerksamkeit folgt, wird man gewahr werden, dass ihm dieser Begriff nicht durch die Erfahrung, sondern durch die mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie gegeben ist. Newton entwickelt erst die mathematische Theorie der anziehenden Kräfte und an diese Theorie knüpft er dann inductorisch den Sternenlauf. Die mathematische Naturphilosophie zeigt rein theoretisch, dass alle Grundkräfte der Materie (also alle solche Kräfte, welche unmittelbar unter dem Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung stehen) stetig beschleunigende Kräfte der Anziehung oder Abstossung sein müssen, die entweder in die Ferne oder in der Berührung wirken und dazu noch, dass das einfachste und natürlichste Gesetz für die Anziehung in die Ferne das im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung ist, weil dies das Gesetz der Ausbreitung des Raumes selbst von einem gegebenen Punkt aus ist. Die Induction zeigt es als wirklich in der Natur giltig. Was nach der mathematischen Theorie der Naturphilosophie eine bloss mögliche Form der Erfahrung war, das wird durch die Induction zum Naturgesetz. Ohne die erstere würde dies Gesetz keine Apodicticität und ohne die letztere keine assertorische Giltigkeit haben. Dort hat man es nur *in abstracto*, hier *in concreto*.

Bei einer hypothetischen Induction muss man also immer eine Voraussetzung machen und diese nimmt man entweder aus der Erfahrung und schon bekannten physischen Erscheinungen oder aus der mathematischen Naturphilosophie, der Rüstkammer aller physikalischen Hypothesen. In Bezug auf diese Voraussetzung steht Folgendes als Regel fest:

1. Der Fall oder das Phänomen muss einer Erklärung bedürfen. Wenn Keppler in seinem *Mysterium Cosmographicum* und in seiner *Harmonice Mundi* Gründe sucht für die Anzahl

der Planeten sowie für die Grösse ihrer mittleren Entfernungen und ihrer Excentricitäten, so wissen wir im Voraus, dass er vergebens sucht und nach einem Schatten hascht, weil auf diesem Gebiet nicht das Gesetz, sondern der Zufall waltet.

2. Man muss wissen, woher die Gründe der Erklärung zu nehmen sind. Wenn Jemand heut zu Tage die Bewegung der Himmelskörper durch die Entelechien des Aristoteles oder die Intelligenzen des Frata scoro erklären wollte, so würde man ihn allgemein für desorientirt halten über die Zulässigkeit der hier geltenden Gründe.

3. Der Grund muss möglich sein. Eine Rotationskraft z. B., deren Wirkung Drehung ist, wie Keppler eine solche der Sonne als ursprüngliche Kraft zuschrieb, kann keine Grundkraft sein, weil Drehung stetige Veränderung der Richtung und somit selbst die Wirkung einer Ursache ist.

Ueber diese drei Punkte muss man schon vor der Induction orientirt sein und die Quelle, aus der man den Erklärungsgrund schöpft, muss auch ein vorläufiges Urtheil über dessen Möglichkeit gestatten.

4. Verhältniss der Induction zu Experiment und Beobachtung.

Jede der drei Schlussarten hat einen andern Charakter. Die kategorische begnügt sich mit Begriffen und geht in blossen Begriffen fort. Die hypothetische Schlussart bedarf einer synthetischen Erkenntnissweise, in welcher immer neue Folgen mit gegebenen Gründen verknüpft sind. Eine solche ist vorzugsweise die reine Anschauung, wie z. B. die geometrische Anschauung des Raumes. Daher ist diese Schlussweise in der Mathematik einheimisch. Die inductorische Schlussart bedarf der Beobachtung und Erfahrung, um aus der Stelle zu kommen. Sie ist daher in den Erfahrungswissenschaften zu Hause.

Die Induction bringt im Untersatz ein völlig neues Merk-

mal zu den Gegenständen hinzu, die der Obersatz als Theile des Ganzen aufzählt. Dieses neue Merkmal kann nun entweder ein empirisches oder mathematisches sein, es kann ferner in der Anschauung entweder offen zu Tage oder in derselben verborgen liegen. Im erstern Falle stellt es sich unserer unmittelbaren Wahrnehmung dar, im letzteren entzieht es sich dieser und kann nur mittelbar und durch künstliche Hilfsmittel zu einem Gegenstande der Anschauung werden. In einem solchen Falle ist daher die Kunst der Beobachtung und des Experiments erforderlich, um den Schleier zu heben, der das Merkmal vor unsern Blicken verbirgt, das im Untersatz als Prädicat mit dem Mittelbegriff als dem zugehörigen Subject zu verbinden ist. In dieser Kunst der Beobachtung und des Experiments liegt die eigentliche Schwierigkeit und das Geheimniss der Induction, da sie sich nicht auf Regeln bringen lässt, sondern eine Sache ingeniöser Erfindung bleibt. Es ist dies jene besondere Gabe Keppler's, Wahrheiten von ferne im Dunkeln schimmern zu sehen: sein Genius, wie er zu sagen pflegte, lispelte sie ihm zu.

Die Astronomie und Physik bieten eine reiche Sammlung von Beispielen dar, bei welchen verborgene Beschaffenheiten, Zustände und Verhältnisse von Dingen vermittelst jener Kunst der Erfahrung enthüllt worden sind. So entzieht sich z. B. die Axendrehung der Erde unserer unmittelbaren Wahrnehmung, aber sie kann durch das schöne Foucault'sche Experiment sichtbar gemacht und vor Augen gelegt werden. So haben die Interferenzphänomene die wellenförmige Bewegung des Lichtstrahls enthüllt. So haben uns, nach einer treffenden Bemerkung Kant's, die schiefe Fläche des Galilei, der Perpendikel des Huygens, die Quecksilberröhre des Torricelli, die Luftpumpe des Otto Guericke und das gläserne Prisma des Newton den Schlüssel zu grossen Naturgeheimnissen gegeben. Durch die Elektrisirmaschine können wir im Kleinen dieselben Naturerscheinungen hervorbringen, welche die Natur im Gewitter und Nordlicht zeigt. Fresnel hat durch ein äusserst sinnreiches Verfahren die Länge der Lichtwellen bei den verschiedenen Farben gemessen, obschon

das Licht selbst unsichtbar ist. Bradley hat durch eine geschickte Zusammenstellung seiner Beobachtungen die Aberrationsellipse sowie die Nutationsellipse entdeckt, von denen weder die eine noch die andere ein Gegenstand unmittelbarer Wahrnehmung ist. Eben dahin gehört der ingeniöse Kunstgriff Keppler's die Entfernungen des Mars zu messen, um von den scheinbaren auf die wahren Oerter desselben zu kommen, ja selbst Newton's grosse Erfindung der Fluxionsrechnung, jenes gewaltigen Werkzeuges zur Erkenntniss des Zusammenhangs von Ursache und Wirkung in der Natur ist dahin zu rechnen. Wie das Prisma dem Sinn des Auges die Zusammensetzung des weissen Lichtes aus dem Lichte der bunten Farben, so zeigt die Analysis des Unendlichen dem Verstande, dem Auge des Geistes, die Erzeugung der Wirkungen durch ihre Ursachen.

In der Natur ist Alles nach Maass, Zahl und Gewicht geordnet. Dies zufolge des Verhältnisses unserer Sinnesanschauung zur mathematischen Anschauung. Alle Körper und alle Erscheinungen, welche uns die Sinne zeigen, befinden sich im Raum und in der Zeit und sind in diesen eingegrenzt. Daher tragen die Naturgesetze einen mathematischen Charakter an sich. Die Figur eines Körpers, von dem uns die Sinnesanschauung nur Theile zeigt, die geometrische und phoronomische Form und Gestalt des Mechanismus eines Naturprocesses, den wir ebenfalls nur stückweise in seinem Verlauf beobachten können, oder der verhüllt vor unsern Augen liegt, das Gesetz der Abhängigkeit des einen wie des andern von den wirkenden Naturkräften — das sind Gegenstände, die nur inductorisch erforscht werden können. Hierbei kommt es immer auf zwei Dinge an: 1) auf die Messung von Grössen, die empirisch durch die Beobachtung gegeben sind, 2) auf die Coincidenz dieser durch Messung erhaltenen Zahlen mit andern Zahlen, die sich mathematisch durch Rechnung oder Construction aus einem Gesetz ableiten lassen. So mussten bei Keppler's Induction die gemessenen Entfernungen des Mars mit denen aus der Polargleichung der Ellipse (dem Gesetz der Bahn) berechneten Entfernungen zusammenstimmen. So zeigte Newton, als

er die Identität der himmlischen Anziehung mit der irdischen Schwere bewies, dass der Mond während einer Secunde von der Tangente seiner Bahn um eine Grösse abgelenkt wird, die dem, nach dem Gesetz der quadratischen Abnahme der Schwere verminderten Fallraum für die erste Secunde an der Erdoberfläche genau gleich ist. Ebenso zeigte er aus den Eigenschaften der Ellipse, dass bei ihr die Ablenkung von der Tangente genau in demselben Verhältniss steht, wie die Anziehungskraft (der Sonne), die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt. So zeigte Bradley, dass die Ortsveränderung der Fixsterne an der Himmelskugel in Länge und Breite, welche er entdeckt und beobachtet hatte, genau so gross ist, als sie nach dem Gesetz der Abirrung des Lichtes sein muss.

Jene Messung der Beobachtungsgrössen selbst lässt sich aber in den meisten Fällen nicht unmittelbar durch Maassstäbe und Messinstrumente, sondern nur mittelbar durch Rechnung aus gegebenen empirischen Datis bewerkstelligen. So konnte Keppler die Entfernungen des Mars nicht direct messen, sondern musste sie aus einer sinnreichen Auswahl und Zusammenstellung für diesen Zweck geeigneter Tychonischer Beobachtungen ableiten. Ebenso konnte Newton die Grösse des Raumes, durch welchen der Mond in einer Secunde gegen die Erde fällt, nicht selbst messen, sondern musste ihn als Sinus Versus des Bogens von einer Secunde für den gegebenen Halbmesser der Mondbahn berechnen. Das Nämliche war bei Bradley der Fall, der die zufolge der Aberration stattfindende Grösse der Ortsveränderung eines Fixsternes erst aus der Zusammenstellung seiner Beobachtungen der Oerter dieses Sternes ermitteln musste.

Es findet also hier eine besondere Kunst der Messung solcher Beobachtungsgrössen Statt, die wir nicht unmittelbar beobachten und messen können. So können wir die Bewegung der Gestirne nur an der Himmelskugel, aber nicht im Raume beobachten.*) Die Grössenbestimmungen

*) Weil wir von der Erde aus nur wie von Einem und nicht von verschiedenen Standpunkten in die Tiefe der himmlischen Räume blicken,

der dritten Dimension des Raumes, der Tiefe der Himmelsräume, entziehen sich daher unserer unmittelbaren Beobachtung und Messung und können nur aus gegebenen Parallaxen erschlossen werden. Es giebt sogar Naturprozesse, bei denen selbst die Masse, die sich bewegt und durch ihre Bewegung die Erscheinungen bewirkt, gar nicht beobachtet werden kann. So spielt der Lichtprozess, das Wellenspiel im Aether, unsichtbar vor unsern Augen. Demohnerachtet kennt man die Länge der Lichtwellen für die verschiedenen Farben, die Grösse und Gestalt der Bahn des oscillirenden Aetherthcilchens, die Form der Wellenfläche, die sich aus den schwingenden Aethertheilchen in verschiedenen Medien verschieden bildet und je nach der Verschiedenheit der Elasticität derselben ein anderes Gesetz des Fortschritts hat. Die Wellenbewegung im Aether ist mithin zwar kein Gegenstand der Sinnesanschauung, wohl aber ein Gegenstand der mathematischen Anschauung geworden; sie ist, wie Whewell sagen möchte, *not an object of sensation, but of intuition which we not perceive, but contemplate.*

Wir können Veränderungen, die sich in der Natur selten oder niemals zutragen würden, veranlassen, wenn wir Dinge zusammenbringen, die in einander wirken sollen. Dies nennt man Versuche oder Experimente. So wurde z. B. die Elasticität der Luft durch die Versuche mit der Luftpumpe entdeckt. Heron und selbst Pascal wussten es noch nicht, dass die Luft elastisch ist. Der letztere schloss aus hydrostatischen Gründen, dass das Barometer auf Bergen niedriger stehe, als in der Tiefe, was Perrier bald darauf durch seine Beobachtungen auf dem *Puy de Dôme* bestätigte. Auch Otto von Guericke hielt die Luft anfangs für ein Fluidum, wie das Wasser, nur ungleich leichter als dieses. Er gerieth auf den Einfall, sie aus einem verschlossenen Gefässe abzuziehen, so wie man Wein oder Wasser aus einem Fasse ablässt. Da dies sich ohne weiteres nicht thun lässt, so erfand er zu diesem Zweck seine Luftpumpe. Allein er fand wider Erwarten, dass die Luft im

so verschwinden für unser Auge die Unterschiede der Entfernungen und wir sehen die Sternenwelt nur nach dem Gesetze der Perspective für das Panorama, aber wir sehen nicht den Bau des Himmels.

Gefäss beim Auspumpen sich nicht gleichmässig senkte und einen leeren Raum über sich liesse, sondern immer durch den ganzen Raum ausgedehnt blieb. Dadurch wurde er erst ihre Ausdehnungskraft oder Elasticität gewahr.

Versuche, durch die wir vermittelst künstlicher Vorrichtungen etwas absichtlich hervorbringen, haben vor Beobachtungen, durch die wir nur das auffassen, was wir in der Natur finden, mehrere Vorzüge. Erstlich kennen wir die Dinge, die wir zusammenbringen, was in der Natur nicht immer der Fall ist. Ihre Auswahl und Menge steht in unserm Belieben. Dann können wir die Art der Veränderung bewirken, der wir bedürfen, um das Gesetz der Naturerscheinung zu entdecken. Wir können die Werkzeuge der Kunst dabei gebrauchen und die Umstände ändern, die eine Naturerscheinung begleiten. Ohne Versuche wären viele Eigenschaften der Körper vielleicht immer verborgen geblieben. Man würde vergebens warten können bis die Natur einen luftleeren Raum hervorbringt, und hätte sie denselben auch hervorgebracht, so würden wir ihn doch nicht finden.

Versuche, die Natur einer Ursache zu erforschen, die nicht in die Augen fällt, können auf zweierlei Weise angestellt werden. Die eine durch Abwechselung der Materien, in denen sich ihre Wirkung äussert und durch Abänderung der Zeit- und Ort-Umstände. Die andere durch Messung der Grade der Ursache. Hierzu gehören besondere Instrumente, welche entweder unmittelbar oder mittelbar die Stärke der wirkenden Ursache anzeigen. Wirkt die Ursache successiv, so muss man die Zunahme, die sie in gleichen Zeiten erhält, untersuchen, um dadurch das Gesetz dieser Zunahme zu finden. Endlich muss man alle störenden Umstände entfernen. Auf diesem Wege kann man zu einer mathematischen Erkenntniss der Ursachen gelangen.

---

5. Vollständige und unvollständige Induction und Verhältniss der Induction zur Wahrscheinlichkeit.

Das Wesen der disjunctiven Schlussart oder der Induction besteht darin, dass sie durch die Beobachtung irgend ein Merkmal mit den Eintheilungsgliedern einer Sphäre verknüpft, diese Glieder dann sammelt und das Merkmal auf die ganze Sphäre überträgt. Dies Verfahren setzt offenbar voraus, dass man die ganze Sphäre übersieht d. i. dass man alle Glieder der Eintheilung vollständig aufzählen kann. Das letztere wird nun nicht immer der Fall sein. Oefters wird es sich treffen, dass man wohl einen Theil der Sphäre übersieht, eine gewisse Anzahl von Fällen kennt, aber die Kenntniss aller Fälle, der Ueberblick über das Ganze fehlt oder kann nicht erlangt werden. Nichtsdestoweniger werden aus solchen unvollständigen Disjunctionen zahllose Schlüsse gebildet in der Wissenschaft wie im Leben. Dadurch entsteht der Unterschied zwischen vollständiger und unvollständiger Induction. Ein Beispiel einer vollständigen Induction ist die sogenannte Bernoulli'sche Induction für das Gesetz der Coefficienten des Binomiums mit ganzen bejahten Exponenten. Die Coefficientenbildung wird für $(1+x)^{m+1}$ aus $(1+x)^m$ entwickelt und dann gezeigt, dass sie für $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $(1+x)^4$ . . . also auch für jedes folgende Glied der Reihe giltig ist. *)

---

*) Folgendes artige Beispiel einer Bernoullischen Induction hat mir mein Freund Herr Professor Dr. Kunze in Weimar mitgetheilt.

Ich finde gelegentlich

$$3.\,1^2 = 1 + 1^2 + 1^3$$
$$3.\,(1^2 + 2^2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$$
$$3.\,(1^2 + 2^2 + 3^2) = 1 + 2 + 3 + 3^2 + 3^3$$

u. s. w.

Ich sehe hieraus, dass die dreifache Summe der Quadratzahlen von 1 an gleich ist der Summe von ebenso viel natürlichen Zahlen plus dem Quadrat und dem Cubus der letzten Zahl.

Nun will ich durch die Bernoullische Induction die völlige Allgemeinheit des Satzes beweisen.

So beweist die Geometrie durch drei Fälle, dass der Centriwinkel noch einmal so gross ist, als der Peripheriewinkel auf demselben Bogen.

„Entweder liegt ein Schenkel des Peripheriewinkels in dem Durchmesser des Kreises durch die Scheitel beider Winkel, oder jeder Schenkel liegt auf einer andern Seite dieses Durchmessers; oder beide Schenkel liegen auf einer Seite desselben. Diese drei Fälle sind nur möglich.“

„Im ersten Fall folgt der Satz aus dem Gesetz der Zeichnung gleichschenkliger Dreiecke; im zweiten Falle ist nur der erste zweimal dargestellt; im dritten wiederholt sich ebenfalls der erste zweimal.“

„Also gilt der Satz allgemein.“

Ein Beispiel für die unvollständige Induction ist folgendes:

„Da die Gewitter durch das Einströmen des Polarstroms in den Aequatorialstrom entstehen, so können sie entweder von *NO* nach *SW* oder in umgekehrter Richtung ziehen.“

„Nun ist aber in der Gewitterperiode der Aequatorialstrom m e i s t vorherrschend.“

„Daher werden die Gewitter in der Regel von *SW* nach *NO* ziehen.“

Ich nehme an:

$$\begin{array}{llrrr}
3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n & & + & n^2 + & n^3 \\
\text{und addire} \quad 3\,(n+1)^2 = & n + 1 & + & 2n & + 3n^2 \\
 & & + & 1 & + 3n \\
 & & & & + 1 \\
\hline
\end{array}$$

so kommt:

$$3\,(1^2+2^2+3^2+\ldots n^2+\overline{n+1}^2) = 1+2+3+\ldots+n+(n+1)+(n+1)^2+(n+1)^3$$

welches dieselbe Gleichung ist, wie die angenommene, nur dass hier $n+1$ steht für das dortige n.

Hieraus erhält man sofort wie folgt die Formel für die Summe der Quadratzahlen

$$3\,\Sigma\,(n^2) = \frac{n^2 + n}{2} + n^2 + n^3 = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\Sigma\,(n^2) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.}$$

Ein anderes Beispiel ist die Induction Keppler's, welche ich oben logisch analysirt habe. Sie schliesst von einer endlichen Anzahl einzelner Fälle auf das Gesetz für alle Fälle, deren Anzahl hier unendlich ist. Die einzelnen Fälle sind die durch die Tychonischen Beobachtungen gegebenen Oerter des Mars, das Gesetz ist die stetige Reihenfolge aller Oerter d. i. die Bahn.

Durch die unvollständigen Inductionen d. i. durch die Unvollständigkeit der Disjunctionen einer Sphäre kommt die Wahrscheinlichkeit in unsre Erkenntniss. Auf diesem Felde ist es, wo das Reich der Wahrheit an das Gebiet des Irrthums grenzt. Wahrscheinlich ist eine Erkenntniss, welche nicht volle Gewissheit hat, für welche es aber dennoch überwiegende Gründe giebt. Wahrscheinlichkeit kann daher nicht in der unmittelbaren Erkenntniss, sondern nur in einer Erkenntniss, die eines Grundes bedarf d. i. im Urtheil vorkommen. Sie entspringt mithin aus der Begründung der Urtheile und dies ist nur möglich durch eine Begründungsart, bei welcher eine Theilung der Gründe Statt findet. Eine solche ist der Beweis oder die Begründung durch Schlüsse. Alle Wahrscheinlichkeit beruht daher auf unvollständigen Schlüssen d. i. auf Wahrscheinlichkeitsschlüssen und die Unvollständigkeit solcher Schlüsse entsteht durch die unvollständige Kenntniss der Eintheilungsglieder einer Sphäre, der Theile eines Ganzen.

Obwohl die Wahrscheinlichkeit zunächst durch die unvollständige Induction in unsere Erkenntniss kommt, so bleibt sie doch nicht auf diese beschränkt. Wahrscheinlichkeitsschlüsse können vielmehr in allen Schlussarten vorkommen und sie können ebensowohl aus einem unvollständigen Obersatz wie aus unvollständigen Unterordnungen entspringen. Z. B. kategorisch:

Die meisten A sind B
C ist A
C ist wahrscheinlich B

oder:

Alle A sind B
C ist meist A

C ist wahrscheinlich B

hypothetisch:

Wenn A ist, so ist gewöhnlich B
A ist

Also wird wahrscheinlich auch B sein

oder:

Wenn A ist, so ist B
Gewöhnlich ist A

Also wird wahrscheinlich B sein.

Hinter diesem: „Meisten" und hinter diesem: „Gewöhnlich," steht dann aber doch eine unvollständige Induction: der unvollständige Obersatz oder der unvollständige Untersatz ist der Schlusssatz einer Induction, den man gezogen hat ohne alle Urtheile zu haben, die zu seiner vollständigen Begründung erforderlich sind.

Wo liegt nun der Berechtigungsgrund zu einem solchen Schluss? Bevor wir diese Frage untersuchen können, muss noch eine Vorfrage erörtert werden. Wer heisst uns überhaupt hier schliessen, wo wir uns selbst bewusst sind, unser Urtheil noch aufschieben zu müssen, weil nicht alle Bedingungen zum Schluss vollständig in unserer Gewalt sind? Es muss da, wo die objectiven Gründe des Urtheils selbst fehlen, ein subjectiver Grund hinzukommen, der uns zum Urtheil antreibt. Ein solcher ist, abgesehen von der blind wirkenden Macht der Gewohnheit, welche unsere Associationen leitet, das Interesse, welches als subjectiver Bestimmungsgrund die Urtheilskraft antreibt, ihr Urtheil über einen Gegenstand zu bestimmen. Man denke sich den Arzt am Krankenbette, den Kaufmann in einer Handelskrisis, den Feldherrn vor der Schlacht. Sie müssen handeln und sich ein Urtheil bilden. Der Uninteressirte kann ruhig zusehen und sein Urtheil aufschieben, aber der Feldherr muss seine Anordnungen treffen, er muss Truppenbewegungen ausführen lassen, er muss eine Ansicht fassen über den Plan des Gegners, selbst wenn er auch nur eine un-

vollständige Kenntniss der Aufstellung des feindlichen Heeres besässe. Aber es ist offenbar, dass in einem solchen Falle das Interesse nicht der Bestimmungsgrund des Urtheils selbst sein darf, sondern nur der Antrieb für die Urtheilskraft, Bestimmungsgründe für das Urtheil zu suchen, ohne sich in die Entscheidung einzumischen.

Nicht bloss im Leben, sondern auch in der Wissenschaft zeigt sich ein derartiges Interesse wirksam. Ist es dort ein praktisches, so ist es hier ein logisches und formales. Unsere Vernunft besitzt ein nothwendiges systematisirendes Interesse, sie hat einen angeborenen Hang, Einheit und Zusammenhang in ihre Erkenntnisse zu bringen und dieses Interesse treibt sie zu Entscheidungen auch da, wo die Entscheidungsgründe noch nicht alle in ihrer Gewalt sind.

Jeder Wahrscheinlichkeitsschluss hat in seinen Prämissen anstatt der vollständigen Regel nur eine getheilte Regel. Da sind zwei Fälle möglich. Entweder man schliesst aus der unvollständigen Regel auf einen Fall, indem man nur den grössern Theil der Sphäre unterordnet oder man sucht gerade aus der getheilten Kenntniss der Regel durch den Schluss auf die Regel selbst zu kommen. Der erste Fall bringt die mathematische Wahrscheinlichkeit, der zweite die philosophische.

Bei der mathematischen Wahrscheinlichkeit werden Gründe und Gegengründe (die Theile einer Sphäre gegen einander) gemessen, entweder ihrer Zahl oder ihrem Gewicht nach. Es sei etwa die Frage: was wird geschehen, wenn der Mond das nächstemal wieder zur Sonne kommt? Hier ist das Ereigniss durch Gesetze mit Vollständigkeit bestimmt. Ich weiss genau voraus, ob der Mond über oder unter oder an der Sonnenscheibe vorübergehen wird. Dagegen nehme man das Würfelspiel. Was wird geschehen, wenn ich einen Würfel mit der Hand auf den Tisch werfe? Hier ist gesetzlich d. i. durch die Natur des Würfels bestimmt, dass eine von den 6 Seiten des Würfels oben liegen muss, aber welche von ihnen? das hängt vom Zufall und nicht vom Gesetz ab. Es giebt hier einen Spielraum von Möglichkeiten. Unter sechs Fällen

ist jeder gleichmöglich, und welcher wirklich eintreten wird, das bestimmt der Zufall und keine Nothwendigkeit des Gesetzes. Der einzelne Fall lässt sich hier nicht mit Gewissheit, sondern nur mit grösserer oder geringerer Wahrscheinlichkeit erwarten. Diese Wahrscheinlichkeit kann man berechnen, wenn die Fälle gleichartig sind, und wenn die Anzahl aller gleich möglichen Fälle entweder durch einfache Zählung oder durch Rechnung gegeben ist. So ist in dem angeführten Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wurf, etwa der Zwei $\frac{1}{6}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Pasch? z. B. beide Zweien? Hier hat der erste Würfel 6 Lagen, neben deren jeder der andere wieder 6 Lagen hat, das giebt für beide zusammen 36 mögliche Fälle, von denen nur einer gilt. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{36}$ d. h. unter 36 Würfen wird im Durchschnitt einmal der verlangte Pasch fallen. Ein Ereigniss oder eine Reihenfolge von Ereignissen steht hier im Allgemeinen zwar unter sich gleichbleibenden Gesetzen, aber das einzelne Ereigniss hängt daneben noch von veränderlichen Bedingungen ab, für welche wir das Gesetz ihres Wechsels nicht kennen. Wäre dieses Gesetz gegeben, so würde die Regel des Schlusses vollständig sein. Man kennt die Theilung des Obersatzes oder das Verhältniss der Fälle für und wider und entscheidet sich bei der Unterordnung im Schlusse für das, was in der Mehrheit der Fälle wirklich sein wird. Für die Berechnung der Theile der Sphäre oder jenes Verhältnisses für und wider, sind die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgebildet worden.

Die Anwendung dieser Rechnung setzt die Zählbarkeit und Berechenbarkeit der für ein Urtheil möglicher Weise neben einanderstehenden gleichartigen Fälle voraus. Anders steht die Sache, wenn die Gründe nicht nur gezählt, sondern ihrer Wichtigkeit nach erwogen werden müssen. Alsdann tritt eine intensive Grössenschätzung dazwischen, bei welcher der Calcul seinen Dienst versagt.

Jeder solcher Schluss, beruhe nun die Bestimmung des Ueberwiegenden auf Rechnung oder nur auf einem ungefähren Ueberschlag der Urtheilskraft, bestimmt einen einzelnen Fall

nach einer Regel, welche auch *Ausnahmen* zulässt. Eigentlich dürfte da der einzelne Fall nicht ohne Weiteres durch das Allgemeine bestimmt werden, sondern es müsste erst untersucht werden, ob der vorliegende Fall nicht zu den Ausnahmen gehöre. Erst wo diese Untersuchung nicht mehr möglich ist, wie bei den Fragen über das ungewisse Zukünftige, darf die mathematische Wahrscheinlichkeit von rechtswegen gehört werden.

Ganz anders ist die Natur des philosophischen Wahrscheinlichkeitsschlusses. Der mathematische Wahrscheinlichkeitsschluss theilt die Gründe und Gegengründe und bestimmt, auf welcher Seite das *Uebergewicht* ist. Dies letztere giebt den Ausschlag im Schluss. Ein solches Uebergewicht ist im philosophischen Wahrscheinlichkeitsschluss gar nicht vorhanden, vielmehr würde schon ein *Einziger* Gegengrund hinreichen, die Regel umzustossen. Der philosophische Wahrscheinlichkeitsschluss schliesst geradezu von der Vielheit der Fälle auf die Einheit und Allgemeingiltigkeit der Regel. Der mathematische Wahrscheinlichkeitsschluss schliesst wirklich aus einer unvollständigen Regel, der philosophische dagegen nur aus einer unvollständigen Uebersicht über alle Fälle. Dort ist die Modalität des Schlusssatzes eine andere wie hier. Der Schlusssatz des mathematischen Wahrscheinlichkeitsschlusses bleibt unsicher, indem sich die Urtheilskraft sagen muss, dass es auch anders sein könnte. Die Begründung kann nie vollständig gemacht werden. Beim philosophischen Wahrscheinlichkeitsschluss dagegen ist der Schlusssatz vollkommen sicher, ohnerachtet seiner unvollständigen Begründung. Die unvollständige Sphäre wird hier geradezu *ergänzt*.

Was berechtigt mich nun aber, über den Kreis meiner Beobachtungen hinauszugehen und meine Behauptung von den Fällen, die ich übersehe, auch auf diejenigen auszudehnen, die ich nicht mit übersehen kann? Es muss hier offenbar neben der logischen Form des Schlusses noch ein Prinzip geben, welches den Berechtigungsgrund der Ausdehnung der Giltigkeit des Urtheils von einem Theil der Sphäre auf die ganze Sphäre enthält und dieses Prinzip ist kein anderes, als die Vor-

aussetzung, dass es für die in Frage stehenden Fälle ein bestimmtes Gesetz giebt, welches eben durch den Schluss erschlossen werden soll. Man weiss, dass ein gewisser Kreis von Erscheinungen durch ein Gesetz beherrscht wird, aber das Gesetz selbst ist noch unbekannt. Dieses Gesetz nun kann sich vielleicht schon aus der Zusammenstellung einiger weniger Fälle offenbaren und man ist, wenn man auch nur aus wenigen Fällen einmal zu seiner Kenntniss gelangt ist, sicher, dass es für alle die Fälle gelten muss, die in diesem Kreise von Erscheinungen stehen. Auch lässt sich das einmal gefundene Gesetz leicht an allen anderen unter ihm stehenden Fällen prüfen.

Der philosophische Wahrscheinlichkeitsschluss oder die unvollständige Induction hat also ihre Schlusskraft nicht in der logischen Form des Schlusses allein, sondern neben dieser noch in einer Voraussetzung, welche hier beim Schliessen selbst als leitende Maxime dient.

---

6. Empirische und rationelle Induction.

Die Inductionen bilden sich theils auf dem Standpunkte des gedächtnissmässigen Gedankenlaufes gewohnheitsmässig durch die blind wirkende Macht der Associationen, theils werden sie auf dem Standpunkte der Reflexion oder des logischen Gedankenlaufes mit Bewusstsein und Ueberlegung gebildet, wenn man wie Bacon sagt, die Natur frägt und durch Beobachtung und Experiment ihre Antwort sucht. Von der ersten Art der Inductionen gilt, was Macaulay in seiner Abhandlung über Lord Bacon sagt: „Die inductive Methode ist immer seit dem Anfang der Welt von jedem menschlichen Wesen angewendet worden. Sie wird fortwährend von dem unwissendsten Bauertölpel, von dem gedankenlosesten Schuljungen, ja von dem Kind an der Brust angewendet. Diese Methode führt den Bauer zu dem Schlusse, dass er keinen Weizen ernten wird,

wenn er Gerste säet. Nach dieser Methode lernt der Schulknabe, dass ein trüber Tag zum Forellenfange der beste ist. Der Säugling selbst, meinen wir, wird durch Induction bestimmt, von seiner Mutter oder Amme und nicht von seinem Vater Milch zu erwarten.“ Mit der anderen Art der Inductionen dürfte es sich ein wenig anders verhalten und wir sind gegen Macaulays Meinung der Ansicht, dass es recht wohl „möglich sei, die Regel anzugeben, durch welche sich die Induction des Naturforsehers von der einer abergläubischen alten Frau unterscheidet.“

Mitten im Spiel unserer Gedankenverbindungen werden allerdings die Ursachen von gegebenen Wirkungen meist durch gewohnheitsmässige Inductionen bestimmt. Die Wirkung ist ein Erfolg, der nicht die geringste Aehnlichkeit mit seiner Ursache hat und daher auch nicht aus dem Begriffe der Ursache gefunden werden kann, aber wir erwarten, wie Hume ganz richtig lehrt, von ähnlichen Ursachen ähnliche Wirkungen. Durch die öftere Wiederholung ähnlicher Fälle gewöhnen wir uns bei der Erscheinung einer Begebenheit auch ihre gewöhnliche Begleiterin zu erwarten. Die Gewohnheit verknüpft also zwei verschiedene Gegenstände nach dem Causalgesetz von Ursach und Wirkung. Wenn aber Hume weiter meint, das Causalgesetz selbst entspringe nur aus jener subjectiven Gewöhnung unserer Associationen, so verwechselt er offenbar die Zufälligkeit unserer Bestimmungen nach dem Gesetze mit der Nothwendigkeit des Gesetzes selbst. Das Causalgesetz gebietet uns nur, jede Veränderung als die Wirkung einer Ursache zu erklären, aber welches diese Ursache in einem bestimmten einzelnen Falle sei, das muss erst inductorisch erforscht werden.

Wenn die Ursache und das Gesetz ihrer Wirksamkeit bekannt ist, alsdann macht sich die Verknüpfung von Ursache und Wirkung von selbst, aber anders steht die Sache, wenn von einer gegebenen Wirkung die Ursache und das Gesetz ihrer Wirksamkeit verborgen ist, und in dieser Lage befindet sich der Naturforscher. Wollte dieser nach keiner andern Regel, als nach der der oftmaligen gleichförmigen Wiederkehr

derselben Ereignisse urtheilen, so würde sein Geschäft sehr leicht und einfach sein, er würde aber auch niemals Irrthum und Wahrheit unterscheiden können. Denn nach derselben Regel, nach der er auf den Blitz des Gewehres den Knall erwartet, würde er auch schliessen müssen, dass die Nacht die Ursache des Tages sei, weil der letztere immer auf die erstere folge. Man kann das Trügerische dieser Beweisart und die Unrichtigkeit der Baconischen Theorie nicht wohl besser nachweisen, als es Macaulay selbst gethan hat. „Wir haben gehört, (so erzählt er in seiner Abhandlung über Lord Bacon), dass ein ausgezeichneter Richter der vorigen Generation die Gewohnheit hatte, im Scherz nach Tische eine Theorie vorzutragen, wonach die Ursache des Vorherrschens des Jacobinismus die Gewohnheit, drei Namen zu führen, sein sollte. Er führte auf der einen Seite Karl Jacob Fox, Richard Brinsley Sheridan, Johann Horne Tooke, Johann Philpot Curran, Samuel Taylor Coleridge, Theobald Wolfe Tone an. Das waren *instantiæ convenientes*. Er verschritt dann dazu, Fälle *absentiæ in proximo* anzuführen: Wilhelm Pitt, Johann Scott, Wilhelm Windham, Samuel Horsley, Heinrich Dundas, Edmund Burke. Er hätte weiter zu Fällen *secundum magis et minus* übergehen können. Die Gewohnheit, den Kindern drei Namen zu geben, war einige Zeit lang eine im Zunehmen begriffene Gewohnheit gewesen, und der Jacobinismus war auch im Zunehmen begriffen gewesen. Die Gewohnheit, Kindern drei Namen zu geben, ist in Amerika gewöhnlicher als in England. In England haben wir noch einen König und ein Haus der Lords, aber die Amerikaner sind Republikaner. Die *rejectiones* liegen auf der Hand. Burke und Theobald Wolfe Tone sind beide Irländer; folglich ist die Eigenschaft als Irländer nicht die Ursache des Jacobinismus. Horsley und Horne Tooke sind Beide Geistliche; folglich ist die Eigenschaft als Geistlicher nicht die Ursache des Jacobinismus. Pitt und Horne Tooke waren beide zu Cambridge gebildet; folglich ist es nicht die Ursache des Jacobinismus zu Cambridge gebildet zu sein. Auf diese Weise kommt unser inductiver Philosoph zu dem, was Bacon die Weinlese (*Vindemiatio*) nennt, und

erklärt, das Führen dreier Namen sei die Ursache des Jacobinismus."

Der Grund der „Ungereimtheit" dieser Induction, die ihrer Form nach als ein Muster einer nach den Vorschriften Bacons geführten Induction gelten kann, liegt nicht, wie Macaulay glaubt, in ihrer Unvollständigkeit, sondern vielmehr darin, dass Etwas als die Ursache von Etwas anderem genannt wird, von dem man *a priori* weiss, dass es nicht die Ursache sein kann. Allerdings würde eine grössere Anzahl von Fällen auch die Unrichtigkeit dieser Induction darthun, aber der Aufzählung mehrerer Fälle bedarf es hier nicht einmal, da man ohnedies weiss, dass das Tragen zweier oder mehrerer Namen in keinem nothwendigen, sondern nur in einem zufälligen Zusammenhange mit dem politischen Glaubensbekenntniss eines Mannes steht. Wie gross die Zahl der Fälle bei einer richtigen Induction sein müsse, lässt sich durch keine Ziffer bestimmen, und der Unterschied, um den es sich hier handelt, besteht nicht, wie Macaulay sagt, in der Zahl der Fälle, sondern in der Art des Schliessens. Es handelt sich hier um den Unterschied zwischen empirischer und rationeller Induction und dieser Unterschied kommt darauf hinaus, dass die rationelle Induction einer ganz anderen Regel folgt, als dem Gesetz der Erwartung ähnlicher Fälle.

Die empirische Induction besteht in der Zusammenzählung ähnlicher Fälle. Daraus folgt nur nach mathematischer Wahrscheinlichkeit, dass den ähnlichen Fällen irgend eine Regelmässigkeit zu Grunde liege, aber die Regel selbst ist damit noch nicht gefunden.

Die rationelle Induction dagegen lässt auf ein Mehreres schliessen, als was in der blossen Zusammenstellung der Wahrnehmungen liegt. Wenn ich hundert astronomische Beobachtungen eines Planeten habe, so habe ich hundert Richtungen, in denen das Gestirn nach und nach erschienen ist, aber in welcher Richtung es zu jeder spätern Zeit erscheinen wird oder in jeder früheren erschienen ist, lässt sich daraus nicht bestimmen — die hundert Richtungen bleiben so lange isolirte Thatsachen ohne alle Consequenz, bis es dem Verstande (diesem

Vermögen der Verbindung in unserer Erkenntniss) gelingt eine Verbindung zwischen ihnen und den vorhergehenden ebenso wie den nachfolgenden einzuführen. Diese Form der Verbindung aller Beobachtungen zu einem Ganzen, kommt nun, wie wir schon oben sahen, nicht aus der logischen Form des Schlusses, sondern aus der Geometrie der Kegelschnitte. Die Induction für sich könnte keine Begriffe in unsre Erkenntniss einführen, die nicht schon in der Wahrnehmung liegen, wenn sie sich nicht selbst auf *a priori* erkannte Begriffe stützte. So fordert z. B. unsre Urtheilskraft *a priori* die Giltigkeit der Causalbegriffe als Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung und nur kraft dieser Voraussetzung kann die Induction sie anwenden.

Es ist der uralte Erbfehler in der Theorie der Inductionen, dass man diese Schlussart von aller Erkenntniss *a priori* gänzlich unabhängig machen wollte und das durch die Gewohnheit bestimmte Gesetz der Erwartung ähnlicher Fälle für das Prinzip aller Induction hielt. Dadurch sind die grossen französischen Mathematiker Condorcet, Laplace und Lagrange zu der Verwechselung der Induction mit dem mathematischen Wahrscheinlichkeitsschluss und zu der irrigen Meinung Humes verleitet worden, dass alle unsre Kenntniss von Gesetzen der Bewirkung nur auf der Zusammenzählung gleichförmiger beobachteter Erfolge beruhe und sich davon ableiten lasse.

Diese Theorie gründet sich auf zwei Hauptsätze, die sich mit Lacroix so aussprechen lassen:

1. Wenn wir eine Art von Erscheinungen ohne Ausnahme nach einer Regel erfolgen sehen, so setzen wir voraus, dies werde auch ferner so erfolgen.

2. Wenn wir bei der Reihenfolge von Erscheinungen einer Art einen Erfolg nach verschiedenen Regeln beobachten, so sind wir geneigt, den zukünftigen Erfolg so zu vermuthen, wie er in der Mehrheit der Fälle eintreffen kann.

Demnach würde unser Urtheil über die Gewissheit oder die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nur auf der Gewohnheit der Erwartung ähnlicher Fälle beruhen. Aber das ist geradezu falsch. Wenn wir mit einem höheren Grade

der Gewissheit ein zukünftiges oder sonst noch nicht beobachtetes Ereigniss vorausbestimmen, so begnügen wir uns nicht damit, die bisher beobachteten einförmigen Ereignisse durchzuzählen und unsere Erwartung nach der grössten Anzahl gleicher Fälle zu regeln, sondern wir verlassen uns auf die Einsicht in die nothwendigen Gesetze, unter denen es erfolgt und suchen diesen den einzelnen Fall unterzuordnen. Z. B. Jemand trifft auf seinen Wanderungen oft an einer Stelle des Flussufers einen Mann mit einem Kahn, und es wird ihm zur Gewohnheit sich von diesem übersetzen zu lassen. Hat er nun nicht weiter bedacht, warum der Mann da verweile, so wird er leicht einmal getäuscht werden, wenn die Geschäfte den Mann mit seinem Kahne wo anders hinführen. Wüsste er hingegen, der Mann sei verpflichtet, den Vorübergehenden zu dienen, so kann er sich sicher darauf verlassen, ihn stets wieder zu finden. Doch könnte er freilich auch dann noch irren, weil das Gesetz, worauf er sich verlässt, nur von menschlicher Anordnung ist. Er könnte aber gar nicht irren, wenn ein Naturgesetz die leitende Regel wäre. Denn ein Naturgesetz duldet keine Ausnahme. Unsre Erwartung eines künftigen Ereignisses wird also nicht nur von der Gewohnheit, sondern in vielen Fällen von einem Gesetz geleitet; und wenn wir durch Induction eine ganze Art von Begebenheiten im voraus bestimmen, so geschieht dies durch solche zu Grunde liegende Gesetze. Diese Gesetze sind nun von der gewöhnlichen Theorie der Inductionen nicht beachtet worden. Man hat geglaubt, dass wir immer wie im ersten Fall des gegebenen Beispiels handelten, dass wir uns auf unbedachte Weise nur blindlings von der Einförmigkeit früherer Ereignisse führen liessen. *)

*) Ein gutes Beispiel für die Trüglichkeit einer bloss empirischen Induction ist folgendes. Wir finden

$$2^3 - 1 = 7.$$
$$2^5 - 1 = 31.$$
$$2^7 - 1 = 127.$$

Wir können daraus folgern: Jede ungerade Potenz der 2 um 1 vermindert d. i.

$$2^{2n+1} - 1$$

ist eine Primzahl.

Aber das Gesetz der Erwartung ähnlicher Erfolge nach ähnlichen Vorgängen ist ein Gesetz der reproductiven Einbildungskraft, es ist eine Folge des unsre Gewöhnungen beherrschenden Gesetzes der Association der Vorstellungen, und nicht reine Sache der Urtheilskraft: es ist ein Gesetz des untern und nicht des obern Gedankenlaufes. Dieses Gesetz leitet allerdings die Erwartungen des unmündigen Kindes und die des gemeinen Haufens, aber die des erfahrenen Mannes nur dann, wenn er über die Sache nicht weiter nachdenkt. Man hat z. B. gefragt, wie wahrscheinlich es sei, dass morgen die Sonne wieder aufgehen werde? Denke ich über dies Ereigniss nicht näher nach, so erwarte ich es ruhig auf morgen wieder, nicht, weil ich gehört habe, dass sich dies seit Jahrtausenden regelmässig so zutrage, sondern nur weil ich gewohnt bin, diesen Wechsel von Tag und Nacht zu durchleben. Ueberlege ich mir dagegen die Sache, so finde ich nun die Bestimmungsgründe dieser Erscheinung in den Gesetzen der täglichen und jährlichen Bewegung der Erde und daneben zeigt sich mir nichts, was die Regelmässigkeit jenes Wechsels stören könnte, und demgemäss urtheile ich erst über die Sache. Und zwar diesmal in Uebereinstimmung mit der Gewohnheit. Ein andermal dagegen kann mein Urtheil geradezu meinen Gewöhnungen widersprechen. Es hat sich z. B. bis jetzt immer so getroffen, dass wenn man von Jahrhundert zu Jahrhundert die Schiefe der Ekliptik beobachtete, man stets eine Abnahme derselben bemerkte. Diese Abnahme dauert bereits seit 2000 Jahren, so weit uns die Beobachtungen zurück führen. Wollte man aber daraus schliessen, dass für alle Zeiten eine solche Abnahme Statt finden müsse, so würde man sich irren. Denn die astronomischen Gesetze lehren uns, dass diese Abnahme nur bis zu einem gewissen Zeitpunkte geht und sich dann in eine fortschreitende Zunahme verwandelt. Wenn man die Ursache kennt, von der ein Ereigniss abhängt, so

---

Aber wollten wir von diesen Fällen der Giltigkeit der Regel auf ihre Allgemeingiltigkeit schliessen, so würde uns schon der nächste Schritt die Falschheit dieses Schlusses zeigen. Denn

$$2^9 - 1 = 511 = 7 . 73.$$

weiss man auch wie es das nächstemal eintreten wird und man wird sich nicht erst darauf einlassen nachzuzählen, wie oft es so und wie oft es anders früher stattgefunden hat.

Betrachten wir endlich das Gesetz der Erwartung ähnlicher Fälle selbst genauer, so können wir uns leicht überzeugen, dass es kein blosses Gesetz für Associationen, sondern ein Gesetz der Erkenntniss in Verbindung mit Erinnerungen ist. Unsre Erwartungen ähnlicher Fälle werden wenn auch noch so dunkel durch ein objectives Gesetz der Erkenntniss und nicht bloss durch die Gewohnheit geleitet. Ohne dieses würden wir gar nicht vermögen die Bewirkung des Einen durch das Andere von der blossen Begleitung des Einen von dem Andern zu unterscheiden. Der wenn auch beständige Begleiter einer Naturerscheinung steht bloss in zufälligem, ihre Ursache dagegen im nothwendigen Zusammenhange mit derselben. Mondschein z. B. ist der Begleiter der Nachtfröste, aber wir wissen mit Bestimmtheit, dass nicht der Mond, sondern die Wärmeausstrahlung der Erdoberfläche den Frost bringt. Woher wissen wir nun das? Daher dass wir das Gesetz der Bewirkung der fraglichen Naturerscheinung kennen. Ohne die Kenntniss dieses Gesetzes würden wir ebenso gut den Mond für die Ursache des Nachtfrostes zu halten berechtigt sein und es würde in der That diese Vermuthung näher liegen, da wir den Mond selbst unmittelbar als Begleiter der Erscheinung beobachten, die ausstrahlende Wärme der Erdoberfläche sich aber unserer unmittelbaren Beobachtung entzieht. Das eben unterscheidet die rationelle Induction von der bloss empirischen, dass sie eine Regel hat, durch welche sie aus den verschiedenen Dingen und Vorgängen, welche eine Naturerscheinung begleiten, gerade denjenigen zu bestimmen vermag, welcher zugleich der Grund ihrer Bewirkung d. i. ihre Ursache ist. Und wodurch gelangen wir nun zur Kenntniss eines solchen Gesetzes der Bewirkung? Nicht die häufige Wiederholung des gleichzeitigen Vorkommens zweier Phänomene, sondern die Beschaffenheit der Erscheinung selbst enthält die Hinweisung auf ihre Ursache.

Nach Hume's Meinung zeigt eigentlich schon die erste

Wahrnehmung die Verbindung des Prädicats mit dem Subject und die öftere Wiederholung derselben Wahrnehmung giebt nur die Allgemeingiltigkeit dieser Verbindung: verwandelt das einzelne Urtheil in ein allgemeines. Der Irrthum dieser Ansicht ist seit Kant's Entdeckungen offenbar. Die Verbindung von Subject und Prädicat im Urtheil ist durch blosse Anschauung allein nicht möglich, sondern beruht stets auf einem reinen Verstandesbegriff, der die Regel der Verbindung dessen enthält, was die Anschauung zeigt. Schon das erstemal, wenn ich ein Gewehr abfeuern höre, und nicht erst nach oftmaliger Wiederholung dieses Ereignisses verknüpfe ich Blitz und Knall wie Ursache und Wirkung.

Hätte Hume Recht, so würde man in dem Falle, dass eine Naturerscheinung mehr als Einen beständigen Begleiter hat, höchstens nach mathematischer Wahrscheinlichkeit darüber räthseln können, welcher von diesen beständigen Begleitern mit ihr in einem nothwendigen Causalzusammenhange stehe und welche sich bloss zufällig zu ihr hinzugesellen. Aber eine bloss empirische Induction lässt sich nicht dadurch in eine rationelle verwandeln, dass man ihr mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Hilfe kommt, sondern wir befolgen ein ganz anderes Verfahren bei der einen und bei der andern. Was in dem einen Falle die Gewohnheit bewirkt, das vollzieht in dem andern Falle die Reflexion, indem sie sich von dem Bewusstsein eines Gesetzes leiten lässt. An die Stelle des Gesetzes der Erwartung ähnlicher Fälle, welches im unteren Gedankenlaufe die inductorische Führung unserer Associationen regelt, treten daher im oberen Gedankenlaufe die leitenden Maximen der Urtheilskraft.

Was Franzosen und Engländer über die sogenannte Elimination des Zufalls vermittelst der Wahrscheinlichkeitsrechnung lehren, beruht auf demselben Fehler in der Theorie der Inductionen. Nicht aus dem Schoosse des Chaos gehen, wie Laplace sagt, bewundernswürdigen Gesetzen folgende Systeme hervor, sondern wir entdecken, wenn wir die

Beobachtungen lange genug fortsetzen, dass das anscheinende Chaos ein nach bewundernswürdigen Gesetzen geordnetes Ganze sei. Es bringt nicht der fortspielende Zufall die bewundernswürdigen Gesetze, sondern wir entdecken, dass das anscheinend Zufällige doch unter festen Gesetzen steht.

---

7. Die leitenden Maximen.

Beim kategorischen Schluss sind die drei *Termini* jederzeit gegeben, bei der Induction dagegen muss der Oberbegriff häufig erst gesucht werden. Wenn man etwas suchen soll, so muss man vorher wissen, was man zu suchen und wie und wo man es zu suchen hat. Die Induction sucht das Gesetz, von welchem ein bestimmter Kreis von Erscheinungen abhängt. Da muss man offenbar im Voraus wissen, dass in diesem Kreise die Nothwendigkeit des Gesetzes und nicht der Zufall (Gesetzlosigkeit) waltet. So ist z. B. der Lauf der Gestirne an Gesetze gebunden, die Anzahl der irdischen Grundstoffe nicht. Die blosse Voraussetzung der Gesetzmässigkeit reicht aber noch nicht hin, man muss auch irgend eine Vorstellung von der Beschaffenheit des Gesetzes haben, das man suchen will. Als Keppler die Figur der Marsbahn suchte, da wusste er schon vor seiner Induction d. i. *a priori*, dass die Planeten nicht nach Laune oder Zufall ihren Weg durch die Himmelsräume nehmen, sondern dass sie um die Sonne eine Bahn beschreiben, die sich nach den Gesetzen der Geometrie verzeichnen lässt. Man muss, will man nicht den Weg zur Wahrheit verfehlen, wissen, ob die postulirte Gesetzmässigkeit bloss geometrisch, oder mechanisch oder teleologisch ist. So suchen noch heut zu Tage in der Physiologie Einige teleologische Erklärungsgründe für die Erscheinungen des Lebens, Andere physikalische (mechanische und chemische), weil man

noch nicht einig ist über die Natur der in diesem Gebiete herrschenden Gesetze.

Die Induction bedarf daher eines Wegweisers und Führers, und einen solchen findet sie in den leitenden Maximen der Urtheilskraft. Was sind nun diese leitenden Maximen? Sie sind nichts anderes als die apodiktischen Gesetze in unserer Erkenntniss, unter denen der Zusammenhang der Thatsachen steht. Diese Gesetze werden denkend erkannt, die Thatsachen aber durch Beobachtung gegeben. Damit kommen wir auf das allerallgemeinste Verhältniss des Denkens zum Erkennen. Die Subsumtion (Unterordnung) der Thatsachen unter das Gesetz setzt nämlich voraus, dass Regel und Fall so gegeben sind, wie sie zusammen gehören und bestimmt dann den Fall durch die Regel. Das wird aber nicht immer so treffen. Es wird häufig vorkommen, dass wir auf der einen Seite wohl Regeln haben, deren Giltigkeit im Allgemeinen wir kennen, auf der anderen Seite Fälle, deren Abhängigkeit von Regeln gewiss ist, aber das nähere Verhältniss, in dem sie zusammengehören, ist noch unbekannt und wird erst gesucht. Hier können wir jene Regeln nicht als ein constitutives Princip d. i. als einen Erklärungsgrund brauchen, sondern nur als ein Regulativ, als eine Maxime im Suchen, um die Art der Abhängigkeit des Falls von der Regel erst zu bestimmen.

Die leitende oder heuristische Maxime ist also keine Prämisse im Schluss selbst, sie ist überhaupt keine Regel, aus der geschlossen würde, sondern eine Anweisung für die Bildung des Untersatzes und die Aufsuchung des Oberbegriffs der Induction. Sie leistet der Induction einen doppelten Dienst. Sie ergänzt die unvollständige und führt die rationelle Induction. Sie zeigt einerseits, dass ein Merkmal da ist, welches mit den einzelnen Theilen des Ganzen verknüpft werden kann und wie und wo es zu finden, und sie enthält andererseits zugleich den Berechtigungsgrund für die Ergänzung der fehlenden Glieder des Ganzen. So ist es z. B. der metaphysische Grundsatz der Bewirkung d. i. das Causalgesetz, das mich anweist, überall da nach einer Ursache zu forschen, wo ich eine Veränderung beobachte. Welches aber diese Ursache

sowie das Gesetz, nach dem sie wirkt, sei, das lässt sich nur durch das Studium der Natur der beobachteten Veränderung ergründen.

Die heuristischen Maximen d. h. die Regeln der Verfahrungsart im Suchen gehören daher nicht der Logik, sondern dem Wesen der einzelnen Erkenntnissweise, die inductiv ausgebildet werden soll. So ist z. B. in der neuern Zeit das Studium der Entwickelungsgeschichte eine leitende Maxime für die Erforschung der Gesetze des Organismus geworden. Das liegt in der Natur und Beschaffenheit der hier vorliegenden Aufgabe. Wenn man den organischen Umbildungen und Metamorphosen rückwärts nachgeht, so kommt man zuletzt auf die Anfänge der organischen Bildung und von da an muss die Beobachtung der Natur auf allen ihren Schritten folgen, um zur Einsicht in das innere Triebwerk eines Naturprozesses zu gelangen, dessen Wesen eben darin besteht, dass er eine Geschichte der Entwickelung aus einem gegebenen Keim hat. Ein anderes Beispiel der Art bietet die Entdeckung der Gravitation dar. Erst nachdem man durch Huygens gelernt hatte, die Bewegung der Himmelskörper als ein Problem der Centralbewegung zu betrachten, war es möglich, das Gesetz der Gravitation zu entdecken. Jene Idee der Centralbewegung war für Newton eine heuristische Maxime der Urtheilskraft, die seine Induction zur Entdeckung des wahren Naturgesetzes führte. Durch sie wurde seiner Aufgabe allererst ihr rechter Ort in unserer Erkenntniss, ihre Stellung zu andern schon feststehenden Theilen unsers Wissens angewiesen und dadurch die wahre Natur der Aufgabe enthüllt. Die heuristische Maxime leitet den Entdecker auf die rechte Spur. Ist man erst auf die Spur gekommen, so ist man auch sicher, sich auf dem rechten Wege zu befinden und nicht aufs gerathewohl zu gehen. Denn Spuren sind nichts anderes als Theile des Weges und man findet sie in Beobachtungen, Experimenten, Exempeln, Vergleichungen u. s. f. Alle solche leitende Maximen sind im wissenschaftlichen Zusammenhange unserer Erkenntniss zuletzt von Principien *a priori* abhängig und sie grenzen jederzeit einen gewissen Spielraum wahrscheinlicher Erklärungen ab. Allen ge-

haltvollen heuristischen Maximen liegen jedoch logisch gewisse formale Bestimmungen zu Grunde, die sich aus der logischen Lehre von den Formen der systematischen Einheit ergeben und in den folgenden drei Regeln enthalten sind:

1. Die Maxime der Einheit: Alle menschliche Erkenntniss steht unter Gesetz und Regel; die unendliche Mannigfaltigkeit der Erfahrungen kann in allen ihren Theilen auf Formen der systematischen Einheit gebracht und unter Principien geordnet werden. Auf dieser Maxime beruht das Bestreben der Classificirung und Systematisirung unserer Erkenntnisse.

2. Die Maxime der Mannigfaltigkeit: Die Thatsachen werden nicht durch Gesetz und Regel, sondern durch die Beobachtung gegeben. Gesetz und Regel sind sich daher nicht selbst genug, sondern fordern immer erst die Fälle der Anwendung in den anschaulich erkannten einzelnen Thatsachen. Nicht das Dasein der Thatsachen, sondern ihr Zusammenhang ist durch das Gesetz bestimmt. Ohne die Beobachtung sind alle Denkformen für sich selbst unzulänglich zur Erweiterung unserer Erkenntniss.

3. Die beide verbindende Maxime ist die Maxime der Wissenschaft: Das Princip ist das Ursprüngliche in der Erkenntniss; das Allgemeine entspringt nie aus dem Besonderen, sondern das Besondere unterliegt den allgemeinen Bestimmungen.

Die Priorität des Allgemeinen nach der ersten und dritten Maxime wird gewöhnlich das Gesetz der Sparsamkeit der Natur (*Lex parsimoniae*) genannt und als solches ausgesprochen: man solle die Anzahl der Principien nicht ohne Noth vervielfältigen (*Causas praeter necessitatem non esse multiplicandas*). In der Natur sind ja alle Folgen jedes Grundes gegeben, also giebt es der Gründe nur möglichst wenige.

Diese Maximen weisen uns an, bei der Ausbildung der Wissenschaften die zufälligen Thatsachen der Erfahrung den nothwendigen Vernunftwahrheiten unterzuordnen, und die Beschränkung der ersten Maxime durch die zweite zeigt uns, dass dies durch Induction geschehen müsse.

Verkennt man die wahre Natur dieser Maximen und hält man sie für die Principien der Wissenschaft selbst, so wird die Behauptung: das Princip und die Einheit sind das Ursprüngliche, dem alles Andere untergeordnet werden muss, der andern: die Anschauung des Einzelnen ist das Anfängliche, durch welches alles Andere klar werden muss — zu widersprechen scheinen, und es werden sich die Meinungen in zwei Parteien spalten, von denen die eine, die der Rationalisten, die Inductionen ganz verwirft, die andere, die der Empiriker dagegen an die Selbständigkeit der Inductionen glaubt.

---

8. Induction und Abstraction.

Bessel sagt in seiner Abhandlung über Wahrscheinlichkeits-Rechnung:*) „Gewiss ist nur, was die unmittelbare Beobachtung gegeben hat, oder was daraus, durch eine Reihe richtiger, meistens mathematischer Schlüsse, abgeleitet worden ist.“ Diese Behauptung, obschon sie von den Meisten angenommen wird, welche sich mit der Theorie der Inductionen beschäftigt haben, ist dennoch falsch. Es giebt noch eine andere Quelle von Erkenntnissen, die von der Beobachtung unabhängig ist und die Wahrheit dieser Erkenntnisse ist nicht weniger gewiss, da sie nicht bloss von assertorischer, sondern sogar von apodiktischer Giltigkeit sind. Wir wissen, dass das Causalgesetz in den entferntesten Sternregionen, wo die Naturerscheinungen vielleicht ganz verschieden sind von denen, die wir beobachten und an die wir gewöhnt sind, ebenso befolgt wird wie auf unseren Planeten. Dies können wir auf keinen Fall durch Schlüsse aus Beobachtungen wissen. Bessel selbst würde wohl zugegeben haben, dass die Axiome der Geometrie nicht durch die unmittelbare Beobachtung gegeben, sondern aus der reinen Anschauung des Raumes unmittelbar eingesehen werden, und dass die geometri-

*) Populäre Vorlesungen. S. 388.

schen Lehrsätze nicht aus Beobachtungen, sondern aus den Axiomen abgeleitet werden. Die Gleichung einer Curve z. B. wird nicht, wie John Mill zu glauben geneigt scheint, aus der Beobachtung eines Gegenstandes, sondern aus der Construction eines Begriffes abgeleitet, und Keppler kam nicht erst durch seine Induction auf den Begriff der Ellipse, sondern er führte nur diesen Begriff, den er schon *a priori* hatte und der ursprünglich bloss der Geometrie angehörte, durch seine Induction in die Astronomie ein. Hätte Thales seinen bekannten Lehrsatz, dass der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist, anstatt auf dem Wege der geometrischen Demonstration auf dem Wege der empirischen Beobachtung und Messung suchen sollen, so würde er bei der Unvermeidlichkeit der Beobachtungs- und Messungsfehler diesen Winkel niemals ganz genau 90° gross gefunden haben und er würde, wenn er eine Partie solcher in den Halbkreis gezeichneter Dreiecke gemessen hätte, eine Reihe verschiedener Werthe für die Grösse jenes Winkels erhalten haben, aus der sich höchstens ein nur wahrscheinlicher mittlerer Werth hätte ableiten lassen, von dem es dahin gestellt bliebe, wie weit er sich der Grösse des rechten Winkels nähert. Aber ohne derartige Messungen und Vergleichungen gemacht zu haben, kennen wir die Grösse des Winkels im Halbkreis in aller Strenge und Genauigkeit und mit einer solchen apodiktischen Sicherheit des Wissens, dass wir die Messung eines Fehlers zeihen, die seine Grösse von der Grösse eines rechten Winkels abweichend giebt. Und wie mit den Theoremen, so ist es auch mit den Axiomen. Die Ueberzeugung von der Wahrheit des geometrischen Axioms, dass die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Punkten sei, ist von unmittelbarer Evidenz und keine Folge von Messungen und Berechnungen gegebener Linien.

Es würde überflüssig sein dies zu erwähnen, wenn nicht noch neuerdings John Mill in Uebereinstimmung mit John Herschel den apodiktischen Charakter der mathematischen Wahrheiten gänzlich verkannt und so weit gegangen wäre zu behaupten, dass die Nothwendigkeit der geometrischen Wahrheiten nur eine Illusion sei und dass alle Axiome durch Induc-

tionen, die sich auf sinnliche Thatsachen stützten, gefunden worden wären. Mill selbst ist genöthigt zu bekennen, dass „die geometrischen Wahrheiten eine charakteristische Eigenschaft, nämlich die Fähigkeit besitzen, in der Einbildungskraft ein Bild hervorzurufen, das so deutlich wie die Wirklichkeit ist" und dass „diese Figuren in unserm Geiste" uns in den Stand setzen unsre Erkenntniss über die Beobachtung „der äussern Gegenstände" hinaus zu erweitern. Hätte er untersucht, wie gerade die geometrischen Wahrheiten diese Fähigkeit erlangen, die ihnen einen so besondern Vorzug vor allen übrigen verleiht, so würde er gefunden haben, dass sie diese Fähigkeit nicht den Gesetzen der Association, sondern ihrer Anschaulichkeit und ihrer Apriorität, also ihrer besondern Natur als nothwendiger Wahrheiten zu verdanken haben.

Nur zufolge der Unkunde der logischen Form der Induction konnte man diese Beweisart als „das Fundament aller Wissenschaften" und als die Quelle aller allgemeinen Wahrheiten betrachten. Die Beweisart durch Induction besitzt, wie wir gefunden haben, keine Selbständigkeit, sondern ist von leitenden Maximen abhängig. Man kann durch sie nie Grundsätze, sondern nur Lehrsätze einer theoretischen Wissenschaft erschliessen. Die Induction ist nicht der Weg zu den nothwendigen Wahrheiten, sondern der Weg zu der Verbindung der nothwendigen Wahrheiten mit den zufälligen Wahrheiten. Sie ist das Band, welches das Mögliche und Nothwendige mit dem Wirklichen unauflösbar verknüpft. Es muss also ein anderer Weg als der der Induction zu den nothwendigen Grundwahrheiten führen und dies ist der Weg der Abstraction.

Abstraction sowohl wie Induction ist ein regressiver Gedankengang d. h. ein Rückgang vom Besondern zum Allgemeinen. Aber die Art des Regressus vom Besondern zum Allgemeinen ist bei dem einen und bei dem andern Verfahren gänzlich verschieden. Die Induction geht durch Beweise, die Abstraction durch Zergliederung rückwärts. Es sei mir z. B. die Rechnung mit Logarithmen bekannt und ich frage,

worauf beruht die Theorie dieser Rechnungsart und die Construction der Tafeln? Hier suche ich die Gründe für das eine und das andere auf, indem ich die allgemeinen Regeln der Rechnungsart von der einzelnen Rechnung abstrahire, aber ich beweise nicht regressiv die Wahrheit arithmetischer Grundsätze und Lehrsätze aus dem Gebrauche der Tafeln. Die Induction beweist die Giltigkeit eines Gesetzes aus vielen Fällen, die Abstraction weist die Giltigkeit eines Gesetzes an einem einzigen Beispiel auf. Die Induction lässt erkennen, welche Gesetze aus den Verhältnissen bestimmter Thatsachen folgen; die Abstraction lässt erkennen, welche Gesetze bei einer bestimmten Behauptung schon vorausgesetzt werden. Zur Induction gehört die Kenntniss aller oder wenigstens vieler Fälle, der Abstraction genügt schon ein einziger Fall. „Ein Paar Stangen, sagt Kästner,*) kreuzweis übereinandergelegt, sind für den Verstand ein Bild, an dem er erkennt, dass ein Paar gerade Linien einander nur einmal schneiden können. Diese Wahrnehmung beruht auf dem Vermögen des Verstandes zu abstrahiren, etwas bei den Stangen zu denken, das er selbst bei Balken so gut denken würde, als bei quer übereinander gespannten Fäden oder gezogenen feinen Strichen. Dieses Vermögen des Verstandes macht, dass man das Axiom *implicite* erkennt, ob man es gleich nicht alsobald abstract ausdrückt. Das Axiom ist, wie Leibnitz sagt, den Exempeln incorporirt.“ So sondert z. B. die Geometrie den Raum, die Form der reinen Anschauung, von dem Gehalt der Sinnesanschauung ab. Die Vorstellung des Raumes ist nicht aus empirischen Thatsachen erschlossen, sondern nach Kästner's richtigem Ausdruck von sinnlichen Vorstellungen abstrahirt.

In einer ganz anderen Lage dagegen befand sich Keppler. Die Marsbahn lag ausser dem Bereich der Sinne, die Vorstellung ihrer elliptischen Gestalt konnte daher nicht durch Abstraction aus ihrer Anschauung gebildet, sondern musste inductorisch erschlossen werden. Die Abstraction hat also ein ganz anderes Verhältniss zur Beobachtung und Erfahrung als

*) Ueber geometrische Axiome. 20.

die Induction. Bei der Abstraction muss der Gegenstand oder das Phänomen, von dem man abstrahirt, ein Gegenstand unmittelbarer Wahrnehmung sein. Die Thatsachen und empirischen Data der Induction brauchen das nicht nothwendig zu sein, es ist auch nicht nöthig, dass alle diese Thatsachen im Bereich der Beobachtung liegen. Es ist z. B. ein grosser Unterschied zwischen dem scheinbaren und dem wahren Orte des Mars oder seinem Ort an der Himmelskugel und seinem Ort im Raume. Nur der scheinbare Ort kann beobachtet, der wahre dagegen muss erst berechnet, also erschlossen werden, und doch waren es die wahren Oerter des Mars, aus denen Keppler die Figur seiner Bahn erschloss. Ebenso war die Figur der Planetenbahnen, aus welcher Newton das Gesetz der Anziehungskraft der Sonne erschloss, nach Keppler's eigenem Ausdruck kein *phaenomenon observatum*, sondern ein *phaenomenon demonstrationibus enucleatum*.

Abstraction ist Absonderung einer Theilvorstellung aus dem Ganzen unserer Erkenntniss. Eine solche abgesonderte Theilvorstellung ist jederzeit eine allgemeine Vorstellung. Nun giebt es aber zwei Arten allgemeiner Vorstellungen: Begriffe und allgemeine Regeln d. i. Gesetze. Die Modalität beider ist verschieden. Der Begriff ist eine nur problematische, das Gesetz dagegen eine apodiktische Vorstellung: in ihm liegt also die Realität der allgemeinen Vorstellungen. Allein diese Wahrheit des Gesetzes ist für sich nur eine Bedingung nothwendiger Bestimmungen und für sich ohne Wirklichkeit, sowie dagegen die Anschauung des Wirklichen für sich ohne Nothwendigkeit bleibt. Erst die Induction verknüpft die abstracte Nothwendigkeit des Gesetzes mit der concreten Wirklichkeit der Dinge, aber sie kann die erstere aus der letztern nicht folgern und erschliessen, sondern setzt sie vielmehr bei allen ihren Schlussverbindungen als schon gegeben voraus.

Grundsätze können überhaupt nicht durch Schlüsse, also auch nicht durch Induction, gefunden und begründet werden. So gewiss es ist, dass aus einem Grundsatz Vieles bewiesen werden kann, so gewiss ist es auch, dass die Forderung, einen Grundsatz selbst zu beweisen, einen Widerspruch in sich birgt.

Denn wenn er bewiesen d. i. erschlossen wird, so wird er aus anderen Sätzen abgeleitet und ist also kein Grundsatz. Aber etwas anderes ist es, einen Satz aus anderen Sätzen beweisen und an einem Satz durch Zergliederung und Abstraction nachweisen, dass ihm ein anderer Satz als Voraussetzung zu Grunde liegt. Dort leite ich eine Folge aus ihren Gründen ab, hier weise ich den Grund zu einer gegebenen Folge auf. Diese Ableitung einer Folge aus Gründen findet bei der Induction ebenso gut wie bei allen progressiven Schlüssen statt, und der Unterschied liegt nur darin, dass bei den letztern die Gründe Realgründe, bei der Induction dagegen die Gründe nur Erkenntnissgründe sind.

Das zusammengesetzte Besondere steht immer früher vor unserm Bewusstsein als das einfachere Allgemeine. In den abgesonderten Besitz des letzteren kommt der Verstand immer erst durch Abstraction. Die Abstraction ist daher die Methode der Aufsuchung der Principen, die Induction dagegen ist die Methode der Zurückführung der Erkenntniss auf ihre Principien.

Man kann den Unterschied, welcher in dem Verfahren, durch Induction oder durch Abstraction zu allgemeinen Wahrheiten emporzusteigen, stattfindet, nicht wohl besser veranschaulichen als an den Beispielen von Keppler und Galilei. Wer die Werke beider Männer studiert, wird sogleich fühlen, dass jeder von ihnen einer andern Methode der Naturforschung folgt. Galilei selbst hat dies sehr lebhaft gefühlt und er spricht sein Gefühl dahin aus, dass Keppler's Art zu philosophiren von der seinigen verschieden sei. Man kann sich wundern, dass das einfache und wie wir meinen selbstverständliche Gesetz der Trägheit Keppler'n stets unbekannt geblieben ist. Er setzte wie alle Mathematiker seiner und der früheren Zeit voraus, dass die Erhaltung einer schon bestehenden Bewegung eine besondere Kraft erfordere. Man war seit Aristoteles gewohnt, die Kraft als eine innere Eigenschaft des bewegten Körpers selbst zu betrachten und man dachte nicht daran, dass die Eigenschaft eines anderen Körpers durch äussere Einwirkung die Bewegung hervorrufen könne. Es war vor

Galilei Niemand in den Sinn gekommen, die Ursache der Erhaltung einer Bewegung von der Ursache der Entstehung und Veränderung derselben zu unterscheiden. Galilei hatte anfangs selbst falsche Vorstellungen von diesem Gegenstande und er hat sich in der That niemals völlig frei davon gemacht. In seinen 1638 erschienenen Discorsen über Mechanik kennt er indessen das Gesetz der Trägheit nicht nur in seiner Anwendung, sondern selbst in seinem abstracten Ausdruck und er spricht es daselbst zwar nicht als Grundsatz, aber doch bei Gelegenheit einer Demonstration als Lehrsatz fast in seiner heutigen Fassung aus: dass die Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers gleichförmig und geradlinig ist, so lange nicht äussere Hindernisse dagegen wirken. Aber noch in dem 1630 erschienenen Dialogen über das Kopernikanische Weltsystem wurde die Gleichförmigkeit von Galilei nur der kreisförmigen Bewegung, nicht der geradlinigen zuerkannt. Wie und wann aber auch Galilei darauf gekommen sein mag, so ist doch so viel gewiss, dass die Erkenntniss dieses Gesetzes nicht, wie Whewell zu zeigen sich bemüht,*) der Induction, sondern der Abstraction ihren Ursprung verdankt. Es kam hier nicht darauf an, wie bei einer Induction durch Beobachtung und Experiment einen neuen Oberbegriff eines zu bildenden Schlusses zu finden. Das Gesetz spricht, wie Whewell selbst bemerkt, von Körpern, auf die keine äussere Kraft einwirkt, ein Fall, der in der That nie vorkommt und daher auch nicht beobachtet werden kann. Auf dem Wege des Experiments konnte nur so viel bewiesen werden, dass mit Verminderung des Widerstands auch die Verzögerung kleiner wird. Und derartige Experimente hat erst lange nach Galilei zuerst Hooke angestellt. Aber es bedurfte derselben gar nicht erst zur Erkenntniss der Richtigkeit und allgemeinen Giltigkeit dieses Gesetzes. Das Gesetz der Trägheit leuchtet von selbst ein, sobald wir bei der Bewegung eines Körpers von allen Einflüssen äusserer Dinge abstrahiren und den richtigen

*) Geschichte der inductiven Wissenschaften übersetzt v. Littrow. Bd. 2. S. 31.

Begriff von Materie mitbringen. Es versteht sich von selbst, dass bei einer Substanz wie die Materie, deren wesentliche Grundeigenschaft Leblosigkeit ist, es keine innern, sondern nur äussere Ursachen der Veränderung ihrer Zustände geben könne, und dass daher eine solche Substanz ohne äussere Einwirkung in dem Zustande beharren müsse, in dem sie sich gerade befindet, sei dieses nun der Zustand der Ruhe oder der der Bewegung.

Niemand ist dem Grundsatze der Relativität aller Bewegung vielleicht näher gekommen als Keppler bei den zahlreichen Umformungen seiner Constructionen aus dem einen in das andere Weltsystem, aber das Verdienst, dieses Gesetz zuerst erkannt zu haben, gebührt Galilei. Und wie und wodurch hat er es erkannt? Nicht durch einen Beweis aus Thatsachen, sondern durch blosses Nachdenken über die Natur der Bewegung und über das Verhältniss unserer Beobachtung der Bewegung zum Raum, der selbst zwar ein Gegenstand der reinen Anschauung, aber dennoch kein Gegenstand der Beobachtung für uns ist.*) Wenn man hört, dass die Himmelskörper unsers Planetensystems sich in Kegelschnitten um die Sonne bewegen oder dass die Figur der Erde die eines Ellipsoids ist, so kann man fragen: durch welche Thatsachen wird das bewiesen? Der Grundsatz der Relativität aller Bewegung dagegen kann nur eingesehen, aber nicht bewiesen werden: man ist von seiner Wahrheit unmittelbar überzeugt, sobald

*) Galilei ist wahrscheinlich darauf gekommen, als er die Dunkelheiten aufklärte, die Kopernikus in seiner Lehre von der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne noch zurückgelassen hatte. Diese Bewegung ist der Grund der sogenannten zweiten Ungleichheit der Planeten, und es entstand daher die Frage, ob die Bewegung der Planeten, welche wir am Himmelsgewölbe beobachten, wirklich epicykloidenartig ist oder uns nur zu sein scheint? Das erstere ist nach dem System des Ptolemäus, das andere nach dem des Kopernikus der Fall. Das erstere System setzt unbefangen voraus, dass jede Bewegung in der Natur so stattfindet, wie wir sie beobachten. Das andere führt den bisher ganz neuen Begriff der Scheinbarkeit der Bewegung in die Bewegungslehre ein und dessen weitere Entwickelung führte den Galilei auf den Grundsatz der Relativität aller Bewegung.

man ihn in *abstracto* gefasst und verstanden hat, ohne dass er eines anderen Satzes weder zu seinem Verständniss noch zu seiner Begründung bedürfte.

Frägt man warum Keppler anscheinend so einfache und einleuchtende Grundwahrheiten, denen er dennoch so nahe war, nicht gefunden hat, so ist die Antwort darauf diese: Keppler ging den Weg der Induction und gelangte dadurch zu seinen astronomischen Entdeckungen, Galilei ging den Weg der Abstraction und gelangte dadurch zur Gründung einer neuen Wissenschaft, der Phoronomie und Mechanik. Es sind Wahrheiten ganz verschiedener Klassen, mit denen es diese beiden Männer zu thun hatten. Die Gesetze Keppler's sind allgemeine Erfahrungswahrheiten, das Gesetz der Trägheit sowie das der Relativität aller Bewegung sind dagegen nothwendige Vernunftwahrheiten. Jene werden *a posteriori* und diese *a priori* erkannt. Der Weg der Induction, den Keppler einschlug und verfolgte, konnte nicht zu diesen Wahrheiten führen, und daraus erklärt es sich einfach, warum er sie verfehlt hat. Zu den übrigen Sätzen seiner Bewegungslehre: dem Satze von dem Parallelogramm der Zusammensetzung der Bewegungen, dem Fallgesetz und dem Satze der parabolischen Wurfbewegung gelangte aber Galilei auf dem Wege der Demonstration. Alle diese Sätze folgen als Lehrsätze aus dem Grundsatze der Relativität aller Bewegung, wenn man einmal begriffen hat, wie jede veränderte Bewegung aus gleichförmig gradlinigen Bewegungen sich zusammensetzen lasse: — sie folgen aus diesem Princip nach hypothetischer Schlussart ebenso wie die Theoreme der Geometrie aus ihren Axiomen.

Jeder der Sache einigermassen Kundige wird zugestehen, dass die Art und Weise, wie Keppler seine drei Gesetze fand, wesentlich von derjenigen verschieden ist, durch die Galilei auf sein Fallgesetz kam. Es wäre wohl denkbar, dass das galileische Fallgesetz auch aus Beobachtungen über das Phänomen des freien Falls der Körper und die Wirkungen der Schwere hätte gefunden werden können, aber das war nicht der Weg, den Galilei einschlug. Er hat sein Fallgesetz nicht inductiv aus der Zusammenstellung und Verbindung der Be-

obachtungen erschlossen, sondern er hat es deductiv d. h. durch einen hypothetischen Schluss aus dem Grundsatz der Relativität aller Bewegung abgeleitet. Dieses Gesetz ist, so wie es dadurch bewiesen worden ist, nur ein phoronomisches Gesetz, für gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung, von dem es zunächst noch dahin gestellt bleibt, ob es auch wirklich in der Natur gilt. Soll es den Charakter eines Naturgesetzes erhalten, so muss streng genommen erst noch bewiesen werden, dass der freie Fall der Körper in der That eine solche gleichförmig beschleunigte Bewegung ist oder dass die Schwerkraft der Erde an einem bestimmten Ort auf ihrer Oberfläche als eine gleichförmig beschleunigende Kraft wirkt. Allein dies ist von Galilei mehr nur vorausgesetzt, als durch Experimente nachgewiesen worden. In der That war Galilei zu dieser Annahme berechtigt, da die Schwere eines Körpers in einem Augenblick gerade so gross ist, als in dem andern. Um die Frage nach der Anwendung der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung auf den freien Fall der Körper erfahrungsmässig beantworten zu können, musste man nothwendig den Weg kennen, den der Körper in der ersten Secunde zurücklegt. Zur Kenntniss dieses Maasses konnte man aber vor der Erfindung des Pendels und der Atwood'schen Fallmaschine, die alle Umstände einer gleichförmig beschleunigten Bewegung recht gut veranschaulicht, nur sehr unvollkommen durch Beobachtung des Abgleitens von Körpern an der schiefen Ebene gelangen, wobei man durch Theilung der Kraft die Geschwindigkeit verminderte. Schon vor Galilei hatte Benedetti sich zu dieser Ansicht von der Schwere als einer gleichförmig beschleunigenden Kraft erhoben. Bei den natürlichen Bewegungen (der frei fallenden Körper), sagt er, wächst die Geschwindigkeit immer fort, weil die Ursache derselben ebenfalls immerfort währt. Und in der That liegt diese Ansicht auch so nahe, dass sie kaum einer weitern Bestätigung durch die Erfahrung bedarf. Mag man nun aber den Begriff der gleichförmigen Beschleunigung als schon in dem Begriffe der Schwere liegend ansehen, oder mag man es für nöthig halten, die Verbindung beider Begriffe durch Experiment und Beobachtung erst nach-

zuweisen, so handelt es sich doch hier nicht um die inductorische Aufsuchung eines Gesetzes, sondern um die Subsumtion eines Phänomens unter einen gegebenen Begriff.

Es giebt in der Geschichte der Wissenschaft keinen Mann, bei welchem das Talent für Abstraction und das Talent für Induction in so hohem Grade vereinigt gefunden würden wie bei Newton und man kann den Unterschied und das Verhältniss beider Verfahrungsarten vielleicht nirgends besser kennen lernen als durch Betrachtung der logischen Form des Zusammenhangs der Sätze in den *Principiis philosophiae naturalis mathematicis*. Wenn Newton einerseits das Gravitationsgesetz durch Induction gefunden und begründet hat, so hat er andererseits die drei *Leges* seiner Naturphilosophie vor aller Induction völlig *a priori* aufgestellt. Sie sind ihm an sich evident wie die Axiome der Geometrie und sie sind die Führer und der Leitstern seiner Inductionen.

Wenn daher Whewell sagt: „die Grundsätze der Bewegung seien aus der Erfahrung geschlossen worden," so ist dieser Ausdruck falsch und gegen die Autorität Newtons. Sie wurden aus der Erfahrung höchstens abstrahirt, aber nicht aus ihr erschlossen. Sie sind Principien der Möglichkeit der Erfahrung, aber keine Erfahrungsurtheile d. i. sie sind der Grund der Erfahrung, aber nicht eine Folge derselben. Die Erfahrung besteht nicht in einer blossen Anhäufung von Thatsachen, sondern in einer Verknüpfung der Wahrnehmungen nach nothwendigen Gesetzen. Diese Gesetze muss man also zu den Wahrnehmungen der Thatsachen mit hinzubringen und sie gelten mithin *a priori* d. h. vor der Beobachtung des Gegenstandes. Wenn man nun von allem Empirischen in der Erfahrung abstrahirt, so muss nothwendig das Gesetz übrig bleiben, das der Erfahrung *a priori* zu Grunde liegt. Und durch ein solches logisches Verfahren der Absonderung des Assertorischen von dem Apodiktischen, des Empirischen von dem rein Rationellen, des Zufälligen von dem Nothwendigen sind die Grundsätze der Phoronomie und Mechanik gefunden worden.

---

9. Verhältniss der Induction zur Theorie.

Theorie in der bestimmtesten Bedeutung des Wortes ist eine Wissenschaft, in der die Thatsachen in ihrer Unterordnung unter nothwendige Gesetze erkannt werden und ihr Zusammenhang aus diesen erklärt wird. Bei einer solchen Wissenschaft kommt zweierlei in Betracht: die logische Form der Verbindung ihrer Sätze und der Gehalt ihrer Sätze, der hier verschiedenartigen Erkenntnissweisen angehört und seinen Ursprung in zwei von einander getrennten Quellen hat.

Die Logik fordert in jeder Wissenschaft, bestehe sie aus gleichartigen oder ungleichartigen Erkenntnissen, eine systematische Einheit aller Sätze dieser Wissenschaft d. i. eine vollständige Unterordnung des Besondern unter das Allgemeine. Zur Vollständigkeit einer solchen Unterordnung gehört ein höchstes Allgemeines, dem zuletzt alles Besondere untergeordnet ist, das aber selbst keinem andern untergeordnet werden kann. Ein höchstes Allgemeines in unsern Vorstellungen, das nicht wieder in anderer Hinsicht ein Besonderes sein kann, heisst aber ein Princip (Grundgedanke). Ein Ganzes von Erkenntnissen hat daher eine systematische Form, wenn es die Form einer Erkenntniss aus Principien hat.

Die Sätze einer Wissenschaft werden im System durch Beweise mit einander verbunden. Da alle Beweise aus Vernunftschlüssen bestehen, so werden die Arten der Schlüsse auch die logisch verschiedenen Systemformen bestimmen. Hierbei kommt aber neben den drei Schlussarten auch der Gang der Schlüsse noch mit in Betracht. Da nämlich das System eine Erkenntniss aus Principien ist, d. h. eine vollständige Bestimmung des Besondern durch das Allgemeine, so können die Formen der Systeme nur durch progressive Schlüsse und Beweise gebildet werden, die vom Allgemeinen auf's Besondere gehen. Die regressiven Beweise, die vom Besondern aufs Allgemeine schliessen, können hingegen nur vorläufig dienen, um eine Erkenntniss auf ihre Principien zurückzuführen. Progressive Beweise leiten Sätze aus ihren Realgründen, Fälle

aus Gesetzen ab. Regressive Beweise dagegen schliessen aus Erkenntnissgründen ohne die Gründe der Sache selbst zu nennen. In jenen findet, wie es Aristoteles ausdrückt, der Gedankengang *διότι*, in diesen der Gedankengang *ὅτι* statt. Jene beweisen, warum etwas ist, diese, dass etwas ist. Jene geben den Grund des Seins von etwas, diese nur den Grund des Wissens um etwas an. Ein Beispiel für diesen Unterschied bietet die Astronomie. Die theoretische Astronomie beweisst regressiv, dass die Planeten sich nach den Kepplerschen Gesetzen um die Sonne bewegen, die physische Astronomie beweisst progressiv, warum sie sich nach diesen Gesetzen bewegen müssen.

Da nun unter den regressiven Schlussarten die Induction die einzige ist, welche bejahend und mit Vollständigkeit vom Besondern aufs Allgemeine schliessen lässt, so erhellt hieraus, warum gerade diese Schlussart bei der Zurückführung unserer Erkenntniss auf ihre Principien eine so ausgezeichnete Rolle spielt.

Da die progressiven Schlussarten die Formen des systematischen Zusammenhangs der Sätze einer Wissenschaft bestimmen, so giebt es für die gleichartige Unterordnung unter ein Princip dreierlei Systemformen: die kategorische, hypothetische und conjunctive.

Das kategorische System ist das System der Einordnung der Wahrheit aller bewiesenen Sätze der Wissenschaft in die Wahrheit der Grundsätze. Das hypothetische System ist das System der Unterordnung der Wahrheit aller bewiesenen Sätze der Wissenschaft unter die Wahrheit der Grundsätze. In dem conjunctiven System findet keine Ableitung der Sätze von einander, weder durch Einordnung noch durch Unterordnung, sondern eine Nebenordnung der Wahrheit vieler Sätze in einem systematischen Ganzen statt:

Die Principien eines kategorischen Systems sind kategorische Regeln. Die Unterordnung in demselben geschieht nicht durch immer neue Sätze, sondern durch immer neue Artbegriffe, die unter dem gegebenen Geschlechtsbegriff der Regel stehen. Die Principien des hypothetischen Systems sind

Assertionen der höchsten Gründe, die Unterordnungen geschehen durch neue Sätze, in denen hypothetisch mit diesen Gründen ihre Folgen verbunden sind. Das kategorische System ist das System einer Wissenschaft aus blossen Begriffen — daher das System der philosophischen Erkenntniss. Das hypothetische ist das System einer Erkenntnissweise, in welcher immer neue Zusammensetzungen von Gründen und Folgen möglich sind. Eine solche Erkenntnissweise ist z. B. die reine Anschauung des Raumes. Die Sätze der Geometrie und der Mathematik überhaupt entwickeln sich daher aus ihren Principien unter der Form des hypothetischen Systems. Das kategorische System wendet dieselbe Wahrheit, welche der Grundsatz ausspricht, nur auf specielle Fälle an. Das hypothetische System dagegen führt zu neuen Wahrheiten und Begriffen, die in dem Grundsatze noch nicht enthalten sind. Die Axiome der Geometrie z. B. sprechen nur von geraden Linien und doch verbreiten sich die Lehrsätze dieser Wissenschaft über alle mögliche Arten von Figuren. Die Kenntniss dieser Figuren schöpft sie nicht aus den Begriffen ihrer Grundsätze, sondern aus der Anschauung.

Das conjunctive System endlich ist das System der empirischen, bloss beschreibenden Wissenschaften, wie Mineralogie, Botanik, Zoologie, Astrognosie etc.

Es giebt also wohl ein conjunctives, aber es giebt kein inductives System der Wissenschaft. Welche Stellung gebührt nun aber da den Inductionen in der Wissenschaft? Um das zu ermitteln ist es nöthig neben dem Unterschiede der logischen Formen der systematischen Einheit auch die Verschiedenartigkeit des Gehalts der menschlichen Erkenntniss in Betracht zu ziehen.

Es giebt zwei verschiedene Quellen, aus denen unsre Erkenntnisse entspringen: den Sinn und die reine Vernunft. Von jenem kommen die Wahrnehmungserkenntnisse, aus dieser die reinen Vernunfterkenntnisse. Die letztern zerfallen in Mathematik und Philosophie. Es giebt demnach drei verschiedene Arten von Erkenntnissen: empirische, mathematische und philosophische. Jede von diesen drei

Erkenntnissweisen trägt einen anderen Charakter an sich: Zufälligkeit und Anschaulichkeit kommt der empirischen, Anschaulichkeit und Nothwendigkeit der mathematischen, Nothwendigkeit ohne Anschaulichkeit kommt der philosophischen zu.

Das Ganze der menschlichen Erkenntniss besteht aus dem Inbegriff und der Vereinigung unsrer empirischen, mathematischen und philosophischen Erkenntnisse. Die empirischen Erkenntnisse geben die Thatsachen und mit diesen den Gehalt unsrer Erkenntniss, die mathematischen und philosophischen bilden die Form dieses Gehalts und somit die Form unserer Erkenntniss. Diese Form der Erkenntniss muss aber von den logischen Formen der Reflexion oder des Denkens wohl unterschieden werden. Die letztern sind nur die Werkzeuge der innern Selbstbeobachtung, die erstere dagegen ist der Gegenstand, der vermittelst jener Werkzeuge in uns beobachtet d. i. zum Bewusstsein gebracht wird. Die Form der Erkenntniss macht also erst den Gehalt des logischen Gedankenlaufes aus.

In den mathematischen Erkenntnissen werden wir uns der Formen der Zusammensetzung und in den philosophischen der Formen der Verknüpfung der Dinge *in abstracto* bewusst. Kant nannte jene: Formen der figürlichen Synthesis d. i. anschauliche Verbindungsformen, diese: Formen der intellectuellen Synthesis d. i. nur denkbare Verbindungsformen, Gesetze.

Reine Mathematik und reine Philosophie stellen ihre apodiktischen Erkenntnisse für sich auf, ohne sich um deren Anwendung zu kümmern, blosse Wahrnehmungswissenschaften stellen die Thatsachen zusammen, ohne deren Erklärung zu geben. Die Erklärung des Zusammenhangs der Thatsachen aus den Gesetzen wird dann erst die Aufgabe der Theorie, und diese gehört den theoretischen oder den Erfahrungswissenschaften an, in denen die apodiktischen Vernunfterkenntnisse auf die assertorischen Wahrnehmungserkenntnisse bezogen und angewendet werden.

Es ist daher ein Irrthum, wenn man meint, alle menschliche Erkenntniss lasse sich aus Einer Quelle ableiten. Die Wahrheit der Thatsachen ist nicht in der Wahrheit der Gesetze enthalten, sondern die Thatsachen sind nur unter dem Gesetz mit einander verbunden. Aus dem Gesetz allein lässt sich nie das Wirkliche, sondern nur die Möglichkeit des Einzelnen und die Nothwendigkeit des Allgemeinen bestimmen. Hingegen keine Thatsache für sich allein lässt sich mit Nothwendigkeit bestimmen; sondern nur, wenn eine Thatsache wirklich gegeben ist, lässt sich nach dem Gesetz ihre nothwendige Folge bestimmen. Man kann z. B. mit Nothwendigkeit eine Mondfinsterniss vorausbestimmen, aber nur wenn für irgend einen bestimmten Zeitaugenblick durch wirkliche Beobachtung die gegenseitige Lage von Sonne, Mond und Erde thatsächlich gegeben ist.

Die zufällige Kenntniss von Thatsachen und die Einsicht in die nothwendigen Gesetze unterscheiden sich daher nicht nach Graden der Gewissheit, sondern stehen in unserer Erkenntniss mit gleicher objectiver Giltigkeit neben einander. Die Verschiedenheit der Modalität unserer Erkenntnisse bezieht sich nur auf die subjective Trennung der Erkenntnissquellen, aber nicht auf die objective Giltigkeit der daraus entspringenden Erkenntnisse selbst. Der Quell des Wirklichen und der Quell des Nothwendigen, Anschauung und Begriff, stehen für unser Bewusstsein in unvermeidlicher Trennung neben einander. Die Erkenntnisse, die aus der einen oder der andern dieser beiden Quellen entspringen, haben daher eine verschiedene subjective Giltigkeit für den einzelnen Menschen. Apodiktische Erkenntnisse sind das Eigenthum eines Jeden, assertorische hingegen nur das Eigenthum derer, die sich die Kenntnisse dieser Dinge erworben haben.

Die Betrachtung des Verhältnisses der verschiedenen Systemformen zu einander und zu den verschiedenen Erkenntnissarten führt zu einer wissenschaftlichen Architektonik d. i. zu einer Lehre vom System aller menschlichen Wissenschaften. Aus dem Verhältniss der Denkformen zur Erkenntniss lässt sich einerseits ein logisches Ideal von der

Gestalt entwerfen, welche die menschliche Wissenschaft annehmen muss, wenn sie vollständig unter den systematischen Formen ausgebildet wäre; andererseits lassen sich daraus methodische Maximen ableiten, nach denen unsre Erkenntniss dieser Gestalt gemäss ausgebildet werden kann.

Den drei verschiedenen Erkenntnissweisen entsprechen die drei verschiedenen Systemformen. Der rein philosophischen Form unserer Erkenntniss gehört das kategorische System, der rein mathematischen Form gehört das hypothetische System und dem reinen empirischen Gehalt in der Erkenntniss ist das conjunctive System eigen. Die Philosophie ist eine Erkenntnissweise aus blossen Begriffen. Bei einer solchen Erkenntnissweise ist aber keine andere systematische Ableitung möglich als durch die kategorische Einordnung besonderer Fälle in die Allgemeinheit der Regel. Die Mathematik ist eine Erkenntnissweise durch Begriffe aus reiner Anschauung. In dieser Anschauung ist das Einfachste das Ursprüngliche und der Grund, aus dem durch immer neue Zusammensetzungen immer neue Folgen abgeleitet werden. Die Ableitung des Zusammengesetzten aus dem Einfachen macht sich daher hier in einer hypothetischen Gedankenverbindung. Endlich die reine Empirie hat es nur mit der Auffassung des vereinzelt durch die Sinnesanschauung Gegebenen zu thun. Jede Thatsache ruht hier auf sich und die eine steht neben der andern in einem conjunctiven System, welches Theile in einem Ganzen zusammenordnet.

Alle systematische Erkenntniss wird in Urtheilen ausgesprochen. Jedes Urtheil bedarf aber zufolge des logischen Satzes des Grundes einer Begründung. Aber nur die Lehrsätze einer Wissenschaft lassen sich beweisen d. i. durch Schlüsse begründen, weil sie in der That aus anderen Urtheilen abgeleitet sind. Grundsätze dagegen sind unerweisliche Urtheile, ihre Begründung muss daher auf anderem Wege als dem des Beweises geschehen. Auch rein empirische Sätze sind unerweislich. In dem conjunctiven System einer empirischen Wissenschaft beruht jeder Satz als Aussage einer Thatsache auf sich selbst und kann nur durch Demonstration aus

empirischer Anschauung begründet werden. Die Mathematik begründet sowohl ihre Grundsätze wie die hypothetischen Regeln ihrer Schlüsse durch Demonstration aus reiner Anschauung. Die Demonstration ist also nach diesem Sprachgebrauch von dem Beweise gänzlich verschieden und sie besteht darin, dass man das in der Anschauung nachweist, was im Urtheil ausgesprochen ist. Der Empiriker demonstrirt an dem Gegenstande der Sinnesanschauung selbst oder an einem Bilde von ihm, der Mathematiker demonstrirt an einer Figur oder Construction. Construction aber ist die Darstellung eines mathematischen Begriffes in reiner Anschauung. Alle Demonstrationen des Geometers z. B. beruhen auf der Anschauung der Constructionen im Raum. In der Mathematik ist daher jede Begründung eines Lehrsatzes Beweis und Demonstration zugleich: das erstere durch die Ableitung des Lehrsatzes aus seinem Obersatz, das andere durch die Construction, aus welcher die hypothetische Regel der Unterordnung fliesst. Diese merkwürdige Verbindung von Demonstration und Schluss bei der Begründung mathematischer Sätze liegt im Wesen der mathematischen Erkenntniss begründet. Die mathematischen Erkenntnisse haben einerseits den Charakter der Anschaulichkeit, andererseits den Charakter der Nothwendigkeit. Die erstere Eigenschaft enthält den Grund der Möglichkeit einer demonstrativen und die letztere Eigenschaft den Grund der Möglichkeit einer discursiven Begründungsart durch Schlüsse. Philosophische Grundsätze lassen sich nur durch Deduction begründen — die schwierigste und künstlichste von allen Begründungsarten, in welcher aus einer Theorie der Vernunft nachgewiesen wird, dass die im Urtheil ausgesprochene Grundbehauptung eine nothwendige metaphysische Grundvorstellung unserer Erkenntniss ist.

Die Regel der analytischen Einheit oder das logische Grundverhältniss des Besondern zum Allgemeinen verwandelt sich, auf die Natur der Dinge bezogen d. h. als objectives Gesetz der Erkenntniss ausgesprochen, zu dem Grundsatz der metaphysischen Verknüpfung: „In der Natur steht alles Dasein der Dinge unter allgemeinen und nothwendigen

Gesetzen.“ Der bloss logischen Abhängigkeit des Besondern vom Allgemeinen entspricht nämlich in der Natur der Dinge die reale Abhängigkeit der Thatsachen von allgemeinen Gesetzen. Dieses Gesetz der metaphysischen Verknüpfung giebt nun dem ganzen Inbegriff der systematischen Erkenntniss die Form einer Theorie. Die Theorie ist der künstlichste Bau der menschlichen Erkenntniss, weil sie aus ungleichartigen Erkenntnissen besteht, aus Erkenntnissen *a priori* und aus Erkenntnissen *a posteriori*; und die ungleichartigen Theile eines solchen Ganzen können, wie wir wissen, nicht einzig nach einem System zusammengeordnet werden, sondern entwickeln sich in drei verschiedenen Systemformen.

Die Vereinigung der verschiedenartigen Bestandtheile der Erkenntniss zu einem Ganzen d. i. der logische Bau der Theorie macht sich nach der Form eines Vernunftschlusses. An der Stelle des Obersatzes steht die philosophische Erkenntniss der höchsten Gesetze, an der Stelle des Untersatzes die mathematische Erkenntniss der Bedingungen der Anwendung und an der Stelle des Schlusssatzes die empirische Kenntniss der Thatsachen. Das Bemerkenswertheste hierbei ist die eigenthümliche Zwischenstellung der mathematischen Erkenntniss zwischen der philosophischen und empirischen. Die mathematische Erkenntniss hat mit der empirischen die Anschaulichkeit und mit der philosophischen die Apriorität gemein und wird dadurch zum verbindenden Mittelglied beider. Sie bringt nämlich einerseits (vermöge ihrer Nothwendigkeit) die Regel zur empirischen Thatsache, andererseits (vermöge ihrer Anschaulichkeit) den Fall zur philosophischen Regel hinzu. Alle Reihen von Grund und Folge werden durch die beiden Grundvorstellungen des Raumes und der Zeit in unsere Erkenntniss eingeführt. Alle Ableitung von Folgen aus ihren Gründen macht sich in reiner Anschauung durch Zusammensetzung, deren Möglichkeit auf Raum und Zeit beruht.

Dieser Stellung der reinanschaulichen Erkenntnissweise zwischen der philosophischen und der sinnesanschaulichen entspricht logisch die Stellung der hypothetischen Systemform zwischen den beiden anderen. Das hypothetische System der

Mathematik ist das einzige unterordnende System. Nur vermittelst dieses Systems kann Unterordnung der Thatsachen unter die Gesetze d. i. Theorie zu Stande kommen. Wir kommen also hier auf den bekannten Ausspruch Pascals: nur so weit geht die Theorie, d. i. die erklärende Wissenschaft des Menschen als die Anwendung der Mathematik langt.

Aus diesem architektonischen Verhältniss der verschiedenen Erkenntnissweisen entspringen folgende Regeln für die Vollständigkeit und Beschränkung aller Theorien:

1. In unserer Erkenntniss kann das empirisch gegebene einzelne Dasein niemals aus der philosophischen Einheit begriffen werden, sondern beide kommen nach Begriffen nur durch Mathematik in Verbindung durch ein hypothetisches System von Grund und Folge. Der Grund aller Erklärbarkeit ist die mathematische Zusammensetzung, die gleich mit bei dem Princip ist.

2. Also können nur Grössenunterschiede des Gleichartigen einer Erklärung unterworfen werden; keine Qualität kann aus einer andern erklärt werden.

3. Alles Mannigfaltige hingegen, was unter denselben Grössenbegriffen steht, muss auch einer und derselben Theorie unterworfen und aus den einfachsten Elementen als blosse Zusammensetzung abgeleitet werden können.

Philosophische und mathematische Erkenntnisse sind als Erkenntnisse *a priori* gleichartig. Es giebt daher eine directe Verbindung zwischen der philosophischen Naturgesetzgebung und der Mathematik. Die Anwendung der Mathematik auf die philosophischen Naturgesetze bildet eine besondere Wissenschaft, die mathematische Naturphilosophie, welche sich ohne Induction ganz systematisch aus ihren Principien entwickelt und zwar in einer zusammengesetzten kategorisch-hypothetischen Systemform. Die Gesetze, welche diese Wissenschaft in ihren Lehrsätzen entwickelt, können aber mit der Erfahrung nicht anders in Verbindung kommen, als durch Induction. Die Induction ist die Brücke, welche von den Thatsachen zu den Gesetzen, von den zufälligen Wahrheiten der Sinnesanschauung zu den nothwendigen Wahrheiten der

Vernunft hinüberführt. Durch sie finden wir die Mittelglieder zwischen unserer empirischen Erkenntniss und der apodiktischen. Diese Mittelglieder liegen nach dem Obigen eigentlich auf dem Gebiete der reinen Anschauung und sind daher mathematischer Natur. In dieses Gebiet der reinen Anschauung giebt es einen doppelten Eingang, einen *a priori* und einen andern *a posteriori*, den einen von Seiten der geometrischen Axiome und den andern von Seiten der Beobachtung. Die Formen der Zusammensetzung oder die Formen der figürlichen Synthesis, wie sie Kant nannte d. i. die rein anschaulichen Verbindungsformen lassen sich nämlich einerseits durch Constructionen im Raum aus den Axiomen der Geometrie ableiten, andererseits sind sie Formen und Gestalten der im Raum befindlichen Dinge. Diese Formen des Zusammenhangs der Dinge im Raum stellen sich entweder unserer unmittelbaren Beobachtung dar oder entziehen sich derselben (wie z. B. die Figur der Erde oder die Figur der Planetenbahnen). Im letztern Falle können sie nur inductorisch aus der Combination von Thatsachen erschlossen werden. Die Combination der Thatsachen muss hier zu einer Construction führen, deren geometrisches (oder überhaupt mathematisches) Gesetz bereits bekannt sein muss. Die eigentliche Schwierigkeit der Induction liegt daher im Uebergang von der Combination empirischer Data zur mathematischen Construction d. i. im Fortgang vom Mittelbegriff zum Oberbegriff, wie z. B. bei Keppler im Uebergang von den empirisch gegebenen Oertern des Mars zu dem geometrischen Ort der Marsbahn, bei Newton im Uebergang von der Figur der Ellipse zu dem Gesetz der Centralkraft — eine Aufgabe, an deren Lösung Halley verzweifelte. Dieser Schritt führt über die Grenze, welche die empirische Erkenntnissweise der Thatsachen von der mathematischen und philosophischen Erkenntnissweise der Gesetze trennt. Hier ist der Punkt des Zusammenhangs zwischen den nothwendigen und zufälligen Wahrheiten.

Die Induction bringt also nur die Untersätze des theoretischen Lehrgebäudes. In der vollendeten Theorie müssen diese Untersätze auf doppelte Weise festgestellt werden: einmal

theoretisch oder, wie die Engländer sagen, deductiv d. i. als Lehrsätze, die durch systematische Ableitung aus ihren Principien folgen, das anderemal inductiv als Erfahrungssätze, die aus der Combination der Thatsachen folgen. Das erstere ist die Aufgabe der mathematischen Naturphilosophie, das andere die eigentliche Aufgabe der Naturforschung.

In der hier angegebenen Gestalt liegen als unübertroffenes Muster einer Theorie Newtons mathematische Principien der Naturphilosophie vor uns. Die ersten beiden Bände entwickeln aus dem Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit, dem Gesetz der Trägheit und dem Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, den metaphysischen Grundgesetzen der Natur, rein theoretisch (deductiv) die Lehrsätze der mechanischen Naturwissenschaft und erst der dritte knüpft inductorisch die Sternbewegung an die Gesetze der Mechanik.

Die Geschichte des Fortschritts von der theoretischen zur physischen Astronomie bestätigt es, dass die leitenden Maximen der Induction bekannt sein müssen, wenn durch dieselbe eine Theorie zu Stande kommen soll d. h. man muss bereits wissen, welche Art von Erklärungsgründen für den gegebenen Kreis von Naturerscheinungen gilt, wenn man auch den bestimmten, wirklich geltenden Erklärungsgrund selbst noch nicht kennt. Vor Galilei und Huygens war man noch völlig in Unwissenheit darüber, woher die Erklärungsgründe für die Planetenbewegung zu nehmen seien. Aristoteles und seine Nachfolger bis auf Fracastoro herab suchten sie in der Annahme wirklicher Himmelswesen, die den Planeten als Führer dienen sollten. Keppler glaubte sie aus der Harmonie des Himmels entlehnen zu müssen. Erst Huygens Entdeckung der Gesetze der Schwungbewegung im Kreise machten es klar, dass die Planetenbewegung als eine mechanische Aufgabe der Centralbewegung zu fassen sei. Damit war zunächst nur die wahre Bahn der Entdeckung bezeichnet. Aber sowie Columbus nicht durch seine Idee die portugiesische Route zu verlassen und Indien auf dem Wege nach Westen zu suchen, sondern durch seine Fahrt Amerika entdeckte; so musste auch Newtons

Geist jene Bahn erst durchlaufen, um zur Entdeckung des Gesetzes der Gravitation zu gelangen. Schon das erste Kepplersche Gesetz zeigte Newton, dass die Kraft, welche die Planeten in ihrer Bahn herumführt, ihren Sitz in der Sonne habe. Damit waren schon die cartesischen Wirbel ausgeschlossen. Die Kepplersche Rotationskraft der Sonne war aber gegen die Grundbegriffe und Grundsätze seiner Naturphilosophie, also gegen die leitenden Maximen seiner Induction. Zufolge dieser Maximen trat an die Stelle einer Drehungskraft eine Anziehungskraft der Sonne und das Gesetz, nach dem diese Kraft wirkt, geben das zweite und dritte Gesetz Kepplers in Verbindung mit einander zu erkennen.

Es giebt einen Unterschied, der in Bezug auf die Stellung der Induction zur Theorie stattfindet, und der in der Regel übersehen worden ist, weil man sich meist die Theorie der Inductionen zu einfach dachte und Verfahrungsarten für gleichartig hielt, die in der That verschiedenartig sind. Inductionen, wie sie zur Bildung einer mathematischen Theorie erfordert werden, müssen nach unsern vorigen Betrachtungen durch Combination der Thatsachen zu einer Construction der Erscheinungen führen. Dies setzt die Gleichartigkeit jener Thatsachen voraus. Besteht aber ein Erfahrungskreis aus ungleichartigen Thatsachen und ist das darin liegende Ganze von Erscheinungen sehr verwickelt und sein Zusammenhang noch völlig unbekannt, so führt die Induction zu keiner mathematischen Construction der Erscheinungen, sondern bloss zu einer empirischen Combination der Erfahrungen. Ich will den Unterschied beider Verfahrungsarten an Beispielen entwickeln.

Als Beispiel einer mathematischen Construction der Erscheinungen wähle ich die Aberration des Lichts der Fixsterne. Da das Licht ebensowohl wie die Erde in steter Bewegung ist, so hätte man voraussehen können, dass zufolge der Zusammensetzung beider Bewegungen der wahre Ort eines Sternes an der Himmelskugel nicht in der Richtung nach welcher wir ihn sehen, sondern in einer mittleren Richtung zwischen denen der Erde und des Lichtes liegen werde. Die Entdeckung der

Aberration hätte daher ebensowohl auf dem Wege der Theorie und Demonstration gemacht werden können, aber sie wurde in Wirklichkeit von Bradley auf dem Wege der Beobachtung und der Induction gemacht. Bradley hatte anfangs noch keine Ahnung von dem, was er fand. Er suchte bekanntlich die jährliche Parallaxe der Fixsterne und er wählte zu diesem Behuf zwei Sterne, die im Solstitialcolur stehen, weil bei diesen die Veränderung der Breite mit der Veränderung der Declination zusammenfällt, deren Rectascension aber um 180° verschieden war. Da die Unvollkommenheit der Uhren damals noch keine genaue Rectascensionsbeobachtungen gestattete, so beschränkte er sich auf die Beobachtungen der Declinationsveränderungen.

Die Vergleichung der Beobachtungen gab folgendes Resultat. Die beiden Sterne, welche in dem Colur der Sonnenwende standen, erreichten ihre grösste oder kleinste Breite wenn die Sonne in den Aequinoctien stand, also wenn der Ort der Sonne und der Ort des Sternes in der Ekliptik um 90° verschieden waren. Zur Zeit der Conjunction und Opposition mit der Sonne befanden sie sich an ihrem mittleren Orte. Bei jedem der beiden Sterne war das Wachsthum der Breite von der obersten oder untersten Grenze an gerechnet immer dem Queersinus der Sonnenlänge proportional. Die Vergleichung beider Sterne mit einander zeigte, dass die ganze Veränderung der Breite dem Sinus der Breite proportional war, was unter Voraussetzung einer jährlichen Parallaxe nur alsdann stattfinden könnte, wenn alle Fixsterne gleich weit von der Sonne entfernt wären.

Der eine der beiden Sterne war *γ Draconis*, dessen Breite = 74° 58′ 20″, die beobachtete jährliche Veränderung derselben = 39″. Der andere war 36 *Camelopard* in Flamsteeds Verzeichniss, seine Polardistanz = 38° 28′ 35″, Breite = 28° 2′ 25″, beobachtete Veränderung derselben = 19″. Aus beiden folgt die Veränderung der Breite für einen Stern im Pol der Ekliptik = 40″, 4.

Dies sind empirische Regeln, zu denen die Combination der Beobachtungen führte und durch welche die beob-

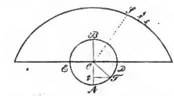
achtete Veränderung der Sterne wenigstens in Declination dargestellt werden konnte. Damit war aber erst die Form der Erscheinung (und auch diese nur zum Theil, weil die Veränderung in Rectascension fehlte), aber noch nicht der Grund derselben gefunden. Ein zufälliger Umstand leitete Bradley auf den wahren Erklärungsgrund. Indem er in einem Boote auf der Themse fuhr, bemerkte er, dass die Fahne an der Mastspitze des Bootes eine von der wahren Richtung des Windes verschiedene Lage annahm, wenn das Boot selbst in dieser oder in einer andern Richtung segelte. Dies gab ihm ein Bild von seinen beobachteten Erscheinungen am Himmel: das Boot stellte die Erde vor, die in verschiedenen Richtungen im Weltmeer um die Sonne segelt und der Wind konnte die Stelle des ebenfalls beweglichen Sternenlichts vertreten. Jene empirischen Regeln dienten zur Verification seiner Annahme d. h. sie waren der Mittelbegriff sowie die Zusammensetzung der Bewegung der Erde mit der des Lichtes der Oberbegriff seiner Induction, aus dessen Construction sich die Form der beobachteten Erscheinungen als Folge aus ihrem Grunde ableiten liess.

Wie die Aberrationsellipse (und somit auch jene Bradleyschen Regeln, die nur ein Theil dieses ganzen Phänomens sind) aus der Zusammensetzung der Bewegung der Erde mit der des Lichtes entsteht, kann man bloss theoretisch so übersehen. In dem relativen Raume, in welchem sich das Auge (oder das Fernrohr) befindet und mit der Erde um die Sonne bewegt, ist die scheinbare Richtung, in welcher der Stern gesehen wird, gegen die wahre, in welcher der Lichtstrahl in dem kosmisch ruhenden oder absoluten Raume liegt, um einen Winkel geneigt, dessen Tangente gleich der Geschwindigkeit der Erde dividirt durch die Geschwindigkeit des Lichtes ist. Der Aberrationswinkel liegt in einer Ebene, deren Lage durch die Tangente der Erdbahn an den jedesmaligen Ort der Erde und durch den wahren Ort des Sternes bestimmt ist, und da jene Tangente sich während eines Jahres um die Erde dreht, so beschreibt die scheinbare Gesichtslinie um die wahre die Mantelfläche eines Kegels, dessen Seitenlinie gegen die Axe

um den Aberrationswinkel geneigt ist und der von der Himmelskugel durchschnitten wird. Steht die Axe dieses Kegels senkrecht auf der Ebene der Ekliptik und mithin der Stern im Pol derselben, so ist seine scheinbare Bahn um seinen mittlern Ort ein Kreis. Ist aber die Axe des Kegels gegen die Ebene der Ekliptik geneigt und der Schnitt der Himmelskugel mit dem Kegel schief, so beschreibt der Stern um seinen mittleren Ort eine Ellipse, deren grosse Axe dem Durchmesser jenes Kreises gleich und dessen kleine Axe dem Sinus der Breite des Sterns proportional ist. Die Ellipticität der scheinbaren Bahn ist also bloss die Wirkung der Perspective.

Zufolge der Abirrung des Lichtes bewegen sich alle Sterne scheinbar dem Punkte am Himmel zu, welcher der perspectivische Vereinigungspunkt aller Linien ist, die derjenigen, in welcher sich die Erde gerade bewegt, parallel sind. Da sich die Erde in der Ekliptik um die Sonne bewegt, so muss der gedachte Punkt in dieser Ebene liegen und zwar der Länge nach 90⁰ vor der Erde oder 90⁰ hinter der Sonne. Daher rückt er natürlich fort und beschreibt in einem Jahre den Umfang der Ekliptik.

Da nun Bradley die Bewegung des Sternes nur in Beziehung auf den Breitenkreis betrachtete und seine Verrückung



aus dem Solstitialcolur oder der Ebene seines Breitenkreises ausser Acht liess, so kann man *A* als den Punkt ansehen, von welchem die Erde ausging, als der Stern an seiner untersten Grenze *s* stand und *C*, den Mittelpunkt der Erdbahn, als denjenigen Punkt, zu welchem sie gelangt, wenn der Stern an seinem mittleren Orte *S* steht. *) Während daher die Erde sich

*) Bringt man nämlich die scheinbare Bewegung des Sternes in der Aberrationsellipse sowie die wirkliche Bewegung der Erde in ihrer Bahn auf rechtwinklige Coordinaten, so wird der Bewegung des Sternes im Sinne der Abscissen, d. i. seiner Längenveränderung derjenige Theil der Erdbewegung entsprechen, welcher mit dem Durchmesser *E D* parallel ist, der dem Durchmesser *A B* parallele Theil der Erdbewegung dagegen

von A nach T bewegt oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, von A nach t gerückt ist, wird der Stern von s nach s' gerückt sein, die Zunahme seiner Breite oder ss' wird also At d. i. dem Quersinus der Sonnenlänge proportional sein, vorausgesetzt, dass der Breitenkreis des Sternes der Solstitialcolur und der Punkt A das Aequinoctium ist. So erklären sich die beiden Umstände, welche Bradley aus der Zusammenstellung seiner Beobachtungen gefunden hatte aus der Theorie. Wir haben also hier eine streng logisch geführte Induction unter hypothetischer Form, welche auf einen Erklärungsgrund führt, aus dem sich sofort theoretisch die in Frage stehende Erscheinung ableiten lässt. Hierbei ist keine der gemachten Annahmen willkührlich, denn die fortschreitende Bewegung des Lichtes war durch Römers Entdeckung an den Finsternissen der Jupiterstrabanten constatirt und die Annahme der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne war zur Erklärung des Phänomens nothwendig, wenn man sie auch noch nicht als bewiesen betrachtet hätte.

Als ein Beispiel der combinirenden Naturbetrachtung wähle ich das Gesetz des Stoffwechsels durch die drei Reiche der Natur. Dieses Gesetz lautet: Organische Materie wird fortwährend durch das Thierreich zerstört und durch das Pflanzenreich aus den organischen Elementen, Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff, neu gebildet. Die Beweisgründe hierfür lassen sich so ordnen:

1. Das Thierreich lebt nur von organischer Materie und zerstört fortwährend organische Materie.

Es lebt von organischer Materie, denn es ist mit seiner Ernährung mittelbar (Fleischfresser) oder unmittelbar (Pflanzenfresser) auf die Pflanzenwelt angewiesen.

Es zerstört organische Substanz durch seinen Lebensprocess, durch Verwesung (Fäulniss) und Verbrennung.

Durch alle diese Processe werden stets organische Stoffe in unorganische Verbindungen übergeführt.

---

wird die Breitenveränderung des Sternes d. i. seine Bewegung längs der Ordinate der Aberrationsellipse bewirken.

Verbrennung, Verwesung und Fäulniss vernichtet die organische Substanz ganz, der Lebensprocess zum Theil, wie die Berechnung über Einnahme und Ausgabe an organischer Substanz bei jedem Thiere zeigt.

Die organische Substanz müsste sich also fortwährend vermindern, aber die Erfahrung zeigt im Gegentheil eine beständige Zunahme des organischen Lebens auf der Erde.

Es muss also fortwährend unorganische Materie in organische Verbindungen übergeführt werden.

Im Thierkörper geschieht dies nicht. (Dies ist ein physiologischer Erfahrungssatz.)

Ausser dem Organismus geschieht es auch nicht. (Keine Thatsache spricht dafür. Im Gegentheil zeigt die Erfahrung, dass die organische Substanz, sich selbst überlassen, unaufhaltsam sich in unorganische Verbindungen zersetzt.)

Also müssen die Pflanzen die unorganischen Stoffe in organische überführen.

Die organischen Elemente sind Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff. Die allgemein verbreiteten Verbindungen, in denen diese sich vorfinden, sind die Kohlensäure, das Wasser und das kohlensaure Ammoniak der Atmosphäre. Auf diese muss also die Pflanzenwelt mit ihrem Nahrungsbedürfniss angewiesen sein.

2. Es giebt in der Natur kein unerschöpfliches Depot organischer Substanzen, aus dem die Pflanzenwelt ihre Nahrung zöge. Die organischen Bestandtheile des Bodens, Humus und Dünger, können die Pflanzenwelt nicht ernähren. Dies zeigt eine statistische Berechnung über den Haushalt der Natur.

a) Der Boden eines Gutes, das Boussingault 21 Jahre bewirthschaftete, producirte jährlich viermal mehr organische Substanz, als ihm durch den Dünger zugeführt wurde.

b) ein Ueberblick über die Pflanzencultur der ganzen Erde giebt das Resultat, dass $^2/_3$ alles Pflanzenbaus ganz ohne Anwendung organischen Düngers von Statten geht. Vom Humus kann diese Vegetation aber auch nicht leben und sich erhalten, denn wäre dessen Vorrath ursprünglich auch noch so

gross gewesen, so müsste er im Laufe der Jahrtausende bereits erschöpft sein.

c) die Alpenweide, die zahlreiche Heerden nährt, bekömmt keine Düngung. Grosse Quantitäten organischer Substanz, welche diese Alpenweiden hergegeben haben, werden als Käse ausgeführt. Für diesen Verlust findet kein Ersatz durch organische Substanz statt und doch leidet die Ertragsfähigkeit jener Weiden keine Abnahme. Ein unerschöpfliches Depot von Humus ist hier auch nicht vorhanden, wo eine dünne magere Erddecke meist auf nackten Felsen liegt.

d) In den Pampas von Buenos Ayres hat sich seit ihrer Entdeckung ein ungeheurer Viehstand von 20 Millionen Stück Pferden und Rindvieh gebildet, die durch ihren Ernährungsprocess gegen 80,000 Mill. Pfd. organischer Substanz alljährlich vernichten. Ausserdem werden an Häuten, Haaren und Hörnern viele Millionen Pfd. organischer Substanz alljährlich ausgeführt. Demohnerachtet hat sich die organische Substanz in diesem Gebiete nicht vermindert, sondern bedeutend vermehrt. Diese Substanz kann nicht als Humus in dem dürren Boden der Pampas gesteckt haben, sondern muss neu erzeugt worden sein.

e) Endlich hat man durch Experimente und Versuche nachgewiesen, dass in ausgeglühtem Thon und in Boden, welcher aller organischen Bestandtheile beraubt ist, Vegetation Statt findet.

Alle diese verschiedenartigen Thatsachen beweisen die ununterbrochen von Neuem stattfindende Erzeugung organischer Substanz durch den Vegetationsprocess der Pflanzen.

Die Annahme, dass eine gewisse unveränderlich bestehende Quantität organischer Materie ursprünglich erschaffen, die durch die organischen Reiche so circulire, dass die Auswurfsstoffe des Einen die Nahrungsstoffe für das Andere hergeben, erweist sich sonach als eine falsche Hypothese.

Chemische Bodenanalysen in Vergleich mit den Beständen und Erträgen lassen den Humusgehalt von der Natur der cultivirten Pflanzen und der Art der Bodenbearbeitung abhängig

erscheinen. Also steht die Fruchtbarkeit des Bodens in gar keiner Beziehung zum Gehalt ihrer organischen Substanz. Humus ist nichts als der Rückstand halbzerstörter Pflanzen, setzt also Pflanzen zu seiner Existenz voraus. Dass aber umgedreht die Pflanzen auch Humus voraussetzen, ist eine Annahme ohne Grund. *)

Was ist nun hier, abgesehen von dem speciellen Gehalt der Gedanken, der Gegenstand und die Form der Beweisführung d. h. was wird bewiesen und wie wird es bewiesen? Es wird die verborgene Ursache zu etwas Gegebenem gesucht. Es ist nämlich die Frage: wo kommt die organische Materie her? verdankt sie ihren Ursprung einem ursprünglichen Schöpfungsakte oder einer in der Natur fortwirkenden Ursache und wo ist im letztern Falle diese zu finden?

Was die Form der Beweisführung betrifft, so geschieht diese nicht in der einfachen und gleichförmigen Form eines disjunctiven Schlusses, sondern durch Zusammensetzung mehrerer Schlüsse. Diese Schlüsse lassen sich so darstellen:

1. Wenn etwas fortwährend zerstört wird und demohnerachtet nicht abnimmt, so muss der Verlust stets wieder ersetzt werden.

Die organische Materie wird fortwährend vernichtet, ohne dadurch eine Abnahme zu erleiden.

Also muss der Verlust an organischer Materie immer wieder von Neuem ersetzt werden.

2. Dieser Ersatz wird entweder aus einem unerschöpflichen Depot geschöpft oder aus einer Werkstätte geliefert, in der das fragliche Material bereitet wird.

Ein solches Depot giebt es nicht

Also muss es eine Werkstätte für die fortwährende Bildung organischer Materie geben.

3. Diese Werkstätte muss entweder ausser dem Organismus oder im Organismus und im letzteren Falle entweder im thierischen oder im Pflanzenorganismus gesucht werden

*) Vergleiche Schleidens Botanik: Ueber Ernährung der Pflanzen §. 190.

Ausser dem Organismus liegt sie nicht;
Im thierischen Organismus liegt sie auch nicht;
Also kann sie nur im Pflanzenorganismus liegen.

Der erste Schluss ist ein hypothetischer, der zweite ein hypothetischer aus disjunctivem Obersatz und der dritte schliesst gleichfalls *modo tollendo ponente* aus einer trichotomen Disjunction. Diese Schlussart findet hier Statt, weil aus den überhaupt möglichen Ursachen auf die in der That wirkliche Ursache geschlossen wird. Aber, was die Hauptsache ist, die Untersätze dieser Schlüsse werden inductorisch aus der Zusammenstellung von Thatsachen bewiesen. Diese Inductionen sind das eigentlich Wesentliche dieser Methode, aber diese Inductionen haben hier das Eigenthümliche, dass in ihnen noch keine Erklärungsgründe für den Zusammenhang der Erscheinungen eingeführt werden, sondern dass sie nur zu einer Gruppirung der Thatsachen führen. So wird durch die Schlüsse des obigen Beispiels gleichsam nur der Fabrikort der organischen Materie, aber noch nicht das Geheimniss ihrer Fabrikation ausfindig gemacht.

Diese combinatorische Methode dient mehr zur Eruirung des Thatbestandes als zur Entdeckung von Gesetzen. Schon Werner hat sie angewendet. Den grossartigsten und geistvollsten Gebrauch von ihr hat Alexander von Humboldt gemacht, der dadurch der Schöpfer einer neuen Wissenschaft, der physischen Geographie oder der allgemeinen Naturgeschichte der Erde, geworden ist. Der Zug der Vulkanlinien, die Vertheilung der Wärme an der Erdoberfläche nach der Abgrenzung der Isothermen, Isotheren und Isochimenen, die Kenntniss der Meeresströme, das Gesetz der Winde und ihrer Drehung, die Vertheilung des Erdmagnetismus sowie die Vertheilung der Gewächse über das Erdreich ist durch sie festgestellt worden.

Sie ist diejenige Methode, vermittelst welcher wir die Erkenntniss der Natur als bloss empirische Erkenntniss noch rational behandeln und ihr systematische Form verschaffen können. Sie sucht keine Erklärungsgründe, sondern nur

allgemeine Formen der Einheit durch Combination der Erfahrung zu bestimmen. Sie sucht das Gleichartige in der Mannigfaltigkeit ungleichartiger Erscheinungen auf. Also gerade da, wo wir von keiner Theorie ableiten, noch nicht erklären können, wo uns alle mathematische und philosophische Theorie verlässt, im eigentlichen Gebiete der Empirie hat diese Methode ihren wissenschaftlich berechtigten Platz. Sie ist daher vorzugsweise in der Physiologie des Organismus sowie in der allgemeinen Naturgeschichte der Erde zu Hause. Sie erscheint zur Carricatur verzerrt in Schellings sogenannter Naturphilosophie, wo ihre empirischen Resultate für philosophische Constructionen der Natur *a priori* ausgegeben werden. Diese Verkennung ihrer Natur hat dort zwei andere Irrthümer zur Folge. Einmal werden die bloss geologisch für die Erde giltigen Verhältnisse für allgemein kosmologisch gehalten, weil man sich irrthümlicher Weise einbildet, sie philosophisch, also *a priori* erkennen zu können. Dann werden die leeren Formen heuristischer Maximen mit den wirklichen Naturgesetzen verwechselt.

Die combinirende Naturbetrachtung fusst auf einer ganz anderen Art von leitenden Maximen als die Induction, welche zur Bildung einer Theorie führt. Bei der letztern sind die leitenden Maximen Erklärungsgründe, bei der erstern hingegen nur Vergleichungsgründe.

Es giebt Gebiete der Naturwissenschaft, in denen es wohl gelingt, die Form zu erkennen, unter welcher die Kräfte in Gegenwirkung sind, ohne noch die Natur dieser Kräfte selbst entdecken oder construiren zu können. Die Inductionen aus der Erfahrung langen dann wohl zu, um morphologische oder stöchiologische Gesetze des Processes zu bestimmen, aber sie gestatten uns noch nicht, diese Gesetze mit den Principien der Dynamik und Mechanik in Verbindung zu bringen und aus diesen zu construiren. So ist z. B. das sogenannte Gesetz der Polarität die blosse Form der Gegenwirkung zweier entgegengesetzter Kräfte, ganz abgesehen von der Natur der im einzelnen Falle wirkenden Kräfte selbst. Was das auch für Kräfte sein mögen und nach welchen Gesetzen sie auch wirken, so

gilt von ihnen doch im Allgemeinen, dass, wo diese Kräfte mit gleicher Stärke zusammentreffen, die Wirkung Null werde; dass, überwiegt die eine, die Wirkung positiv werde; überwiegt die andere, die Wirkung negativ werde. In einem solchen Falle befindet sich die Physiologie des menschlichen Organismus, in welcher man daher noch gar keine theoretischen Erklärungsgründe, sondern nur die Gesetze der Form des organischen Lebens als leitende Maxime für systematische Vergleichungen zu Grunde legen kann. Dadurch gelangt man aber nur zur Erkenntniss der Form der Wechselwirkung im Organismus, aber noch nicht zur Erkenntniss der Naturkräfte, die in dieser Form wirken. Die leitende Maxime ist also hier eine bloss logische und keine reintheoretische, sie ist bloss ein formales Gesetz der Reflexion über den in Untersuchung gezogenen Erfahrungskreis, aber noch kein materiales Gesetz der Erkenntniss desselben.

Noch ein anderer Unterschied muss erwähnt werden, der in den Naturwissenschaften nicht immer mit der gehörigen Sorgfalt beobachtet worden ist. Als Newton sagte „*Hypotheses non fingo*" fühlte er, dass ein Unterschied bestehe zwischen hypothetischer Induction und blosser Hypothese. Eine blosse Hypothese ist eine Annahme ohne Grund, die ihre Bestätigung erst durch die Uebereinstimmung ihrer Folgen mit der Erfahrung erwartet. Bei der Hypothese sind die Voraussetzungen willkührliche Annahmen, bei der hypothetischen Induction dagegen sind sie entweder Erfahrungssätze oder *a priori* gewisse Wahrheiten. Bei der Hypothese hat man die Wahl zwischen mehreren Erklärungsgründen, die hypothetische Induction führt mit Nothwendigkeit auf den einzig wahren Erklärungsgrund.

Copernicus nahm an, die tägliche Bewegung der Erde um ihre Axe sei der Grund der sichtbaren Umdrehung des Fixsternenhimmels und die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne sei der Grund des sichtbaren Sonnenlaufs in der Ekliptik und der Grund davon, dass wir von der Erde aus den Lauf der Planeten epicykloidenartig sehen. Da die Bewegung der Erde kein Gegenstand unserer unmittelbaren Wahrnehmung ist, so musste sie offenbar bewiesen werden. Aber weder

die eine noch die andere Annahme, welche Copernicus über die Bewegung der Erde machte, war bewiesen, sondern es wurde nur von ihm gezeigt, dass man aus der jährlichen Bewegung der Erde den Sonnen- und Planetenlauf ebenso gut erklären könne, wie aus der Epicyklentheorie des Ptolemäus.

Hier haben wir nun zwei Gründe, die geocentrische und die heliocentrische Hypothese, aus denen ohneraehtet ihrer Verschiedenheit dasselbe folgt und die Folgen einer jeden derselben stimmten mit der Erfahrung überein. Die Erfahrungen, welche zur Zeit des Copernicus vorlagen, legten also noch kein Zeugniss ab für die Wahrheit der einen oder der andern, es mussten erst zu den bereits vorhandenen noch neue Erfahrungen ganz anderer Art hinzukommen.

Die geocentrische Hypothese beruht auf dem Augenschein. Die heliocentrische Hypothese entspricht dem Gesetz der Sparsamkeit, indem sie die vielen und verschiedenen Epicykel der Planeten durch die Annahme der Einen Bewegung der Erde überflüssig macht. Die hatte die Anschauung, die andere Vernunftgründe für sich. Jede der beiden Hypothesen konnte wahr sein. Erst aus Bradleys Entdeckung der Aberration folgt die Nothwendigkeit der Annahme der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne.

Die hypothetische Induction bildet einen Schlusssatz, der zum Obersatz eines hypothetischen Schlusses wird und dadurch zur Theorie führt. Auch Copernicus bildete hypothetische Schlüsse, demohnerachtet war seine neue Lehre anfangs doch nur eine Hypothese und keine Theorie. Er schloss z. B. so:

Die Erde hat eine jährliche Bewegung um die Sonne in einer Bahn, welche der scheinbaren Sonnenbahn gleich und ähnlich ist;

Wenn dies der Fall ist, so erscheint die Bewegung der Planeten am Himmelsgewölbe epicykloidenartig;

Die Planeten bewegen sich epicykloidenartig an der Himmelskugel.

Aber den Obersatz dieses Schlusses konnte Copernicus nicht begründen. Es fehlt daher bei diesem hypothetischen Schluss die Assertion des Grundes. Das Dasein des Grundes

muss entweder durch Erfahrung oder mathematisch naturphilosophisch festgestellt sein. Die blosse Hypothese unterscheidet sich daher von der wirklichen Theorie durch die Modalität der Erkenntniss des Grundes: bei jener ist der Grund bloss problematisch, bei dieser aber assertorisch oder apodiktisch.

Bei einer hypothetischen Induction d. i. bei dem Schluss von der Folge auf den Grund oder von der Wirkung auf die Ursache ist der Nachsatz eines hypothetischen Urtheils durch die Erfahrung, also mit assertorischer Giltigkeit gegeben (wie in dem vorigen Beispiel: die Planeten bewegen sich epicykloidenartig an der Himmelskugel oder: Es thaut), aber der Vordersatz ist noch unbekannt und wird gesucht. Der Schlusssatz eines solchen Schlusses muss daher der Vordersatz eines hypothetischen Urtheils sein oder ein dessen Stelle vertretender Begriff (Substantiv). Diesen Begriff sucht die Induction nach bestimmten festen leitenden Maximen, während ihn die Hypothese nur aufs Gerathewohl annimmt oder nach Wahrscheinlichkeiten bestimmt.

Man kann dies an Wells Theorie der Thaubildung erläutern. Das Resultat der Wellschen Induction lässt sich so aussprechen: Wenn ein Köper des Nachts mehr Wärme ausstrahlt, als er empfängt, so condensirt sich an seiner Oberfläche der Wasserdampf der Atmosphäre. Dieses hypothetische Urtheil bildet Well erst durch den Schluss selbst, und er gelangt zur Bildung desselben ausgehend von dem Factum der Erfahrung: Es thaut. Bleibt man hier zuerst nur bei dieser Thatsache oder dem Phänomen stehen, so zeigt die Beobachtung zunächst nur den Absatz von Feuchtigkeit zur Nachtzeit an der Oberfläche der Körper. Suchen wir dann alle Umstände auf, unter denen dieses Ereigniss eintritt, sowie nicht minder die, unter denen es nicht eintritt, so zeigt sich: 1. Wenn Wärme des Nachts ausstrahlt, und die Oberfläche der Körper sich dadurch erkältet, setzt sich Thau ab und wenn keine nächtliche Wärmestrahlung Statt findet (wie bei Wolken bedeckten Himmel) setzt sich auch kein Thau ab. Also Wärmestrahlung und die dadurch eintretende Erkältung der Körper muss Statt finden, wenn sich Thau bilden soll. 2. Die Wärme-

strahlung steht in einem gewissen Verhältniss zu dem Stoff und der Textur des Körpers sowie der Beschaffenheit seiner Oberfläche. 3. Der Absatz von Thau oder das Maass der Thaubildung steht in demselben Verhältniss zu dem Stoff und der Textur des Körpers sowie der Beschaffenheit seiner Oberfläche. So leiten diese Mittelglieder sofort von dem gegebenen Nachsatz auf den zu suchenden Vordersatz, von der Wirkung auf die Ursache: sie zeigen in den bekannten Erscheinungen und Gesetzen der Verdunstung des Wassers durch die Wärme und der Condensation des Wasserdampfes durch die Kälte den natürlichen Erklärungsgrund des Phänomens der Thaubildung.

Dieser Unterschied zwischen blosser Hypothese und Induction unter hypothetischer Form hängt zusammen mit Newtons Begriff einer *vera causa*. John Mill scheint zu glauben, dass der Begriff von dem, was Newton *vera causa* nannte, der Deutlichkeit entbehre. Aber Newton wusste sehr wohl, was er darunter zu verstehen hatte. Seine *vera causa* ist ein Erklärungsgrund, dessen Existenz nicht problematisch, sondern assertorisch oder apodiktisch gewiss ist. Die mathematische Form des Phänomens der Planetenbewegung (d. i. die Ellipticität der Bahn und die beiden andern Gesetze Kepplers) ist genau dieselbe, welche sie sein muss, wenn sie eine Folge von dem Gesetz der Gravitation sein soll. Aber diese Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und den Folgen des angenommenen Grundes ist es eigentlich noch nicht, was die Gravitation als die wahre Ursache (*vera causa*) der Planetenbewegung charakterisirt. Ehe Newton bewies, dass die elliptische Bewegung der Planeten aus der Zusammensetzung einer ursprünglichen Tangentialbewegung mit der Anziehungskraft der Sonne erklärt werden müsse, waren über die Ursache der Bewegung der Himmelskörper sehr verschiedene Vermuthungen gewagt worden. Einige nahmen besondere Himmelswesen oder Intelligenzen an, welche die Planeten durch ihre Bahnen führen sollten, Andere waren der Meinung, dass die Planeten sich durch eine ihnen inwohnende Kraft bewegen (eine Annahme, die dem Gesetz der Trägheit zuwiderläuft), Descartes liess sie durch seine Wirbel, Keppler durch eine besondere

Rotationskraft der Sonne bewegen. Was alle diese Erklärungsgründe von dem des Newton unterscheidet ist dieses, dass alle jene Annahmen aus der Luft gegriffen sind, die des Newton aber auf die mathematischen Principien seiner Naturphilosophie fusst. Die Gravitation ist ein Grund, der apodiktisch (durch die mathematisch naturphilosophische Erkenntniss der in der Natur möglichen Grundkräfte) sowie assertorisch (durch das Fallphänomen) feststeht. Das ist es, was den Charakter der Gravitation als einer *vera causa* ausmacht.

10. Die mathematische Naturphilosophie und ihr Verhältniss zu den naturwissenschaftlichen Inductionen.

Seit Newton die Gesetze der in der Natur wirkenden Kräfte entdeckte, haben in einer unübersehbaren Reihe von Entdeckungen und Entwickelungen die grossen Geometer Europas eine Wissenschaft gegründet, welche durch ihre Evidenz und durch die Aufschlüsse, die sie über die Geheimnisse der Natur giebt, ein ewiges Denkmal der Geistesgrösse unserer Jahrhunderte bleiben wird. Mit bewundernswürdiger Genauigkeit haben diese fortbildenden Geister die Erscheinungen der Natur dem Calcul unterworfen, haben mit Hilfe der Analysis des Unendlichen, diesem erstaunenswürdigen Werkzeug des menschlichen Geistes in Ergründung neuer Wahrheiten, in den himmlischen wie in den irdischen Erscheinungen den unwandelbaren Gang eherner Gesetze erforscht und die Natur am Morgenthore ihrer Schöpfungen belauscht. Die Bewegung der Himmelskörper fand man durch ein einziges Naturgesetz an die Grundsätze der Mechanik gebunden. Aus diesem ist man im Stande mit mathematischer Gewissheit die vergangenen und künftigen Zustände des Weltsystems zu bestimmen. Durch dasselbe Gesetz ist man zur Kenntniss eines neuen Planeten gelangt, und diese Entdeckung wurde nicht mit dem Fernrohr

am Himmel, sondern mit Rechnung auf dem Papier gemacht. Und nicht bloss die Sternenwelt, die gesammte Natur hat man in ihren Tiefen zu ergründen gesucht. Durch höchst sinnreiche Kunstgriffe und Experimente hat man die verschiedenen Zustände und Bewegungen des Lichtes entdeckt, jenes unsichtbaren Wesens, welches alle Körper sichtbar macht. Man hat gefunden, dass in einer Zeitsecunde, während eines Pendelschlags ein Lichtstrahl 42000 Meilen durchfliegt. Man hat gefunden, dass ein solcher Strahl in ausserordentlich kleinen Wellen durch den Raum fliesst und dass in einer Secunde nicht weniger als 500 Billionen solcher Wellen, welche alle einem einzigen Lichtstrahl angehören, das menschliche Auge treffen. Man hat die Gesetze der Luftschwingungen erforscht, auf denen die Harmonie der Töne beruht. Man hat dem geheimnissvollen Wirken des Erdmagnetismus, dem gespenstischen Wesen der Wärme nachgespürt. Man hat gefunden, dass die Bildung der Krystallgestalten nach geometrischen Gesetzen erfolgt und dass die Elementartheile des Pflanzen- und Thierkörpers nach analogen Gesetzen sich formen. Aber ohneraehtet dieses grossen Reichthums an Entdeckungen ist von den grossen inductorischen Aufgaben der Naturforschung bisher doch nur eine, die astronomische, vollständig gelöst worden. Die optische und die übrigen physikalischen Aufgaben stehen dem Ziel ihrer theoretischen Vollendung noch mehr oder minder fern.

Es lässt sich ein naturphilosophischer Ueberblick über die Hauptaufgaben der inductiven Naturforschung geben. Einen solchen will ich hier zu geben versuchen. Dazu ist es aber erforderlich, vorerst einen Blick auf die Principien der Naturphilosophie zu werfen.

Die Naturwissenschaft sucht Erklärung des Zusammenhangs der Dinge aus nothwendigen Gesetzen. Die Naturforschung hat es daher mit drei verschiedenen Aufgaben zu thun:

1. mit der Entwickelung der Gesetze,
2. mit der Constatirung des Thatbestandes und
3. mit der Unterordnung des letztern unter die erstern.

Der Thatbestand wird festgestellt durch Experiment und Beobachtung nach Regeln, welche den sogenannten empirischen Naturwissenschaften angehören. Gesetze dagegen sind allgemeine und nothwendige Wahrheiten d. h. Wahrheiten *a priori*. Die ganze wissenschaftliche Naturerkenntniss ruht also auf einer Vorstellungsweise *a priori* und nicht auf einer durch sinnliche Wahrnehmung bestimmten. So finden wir uns von der Empfindung des Drucks, welchen ein Körper auf unsere Hand ausübt, zu den Gesetzen der Schwere, von der Farbe, welche das Auge an den Körpern vermittelst des Lichtes wahrnimmt, zu der Bewegung der Lichtstrahlen hinüber. Die Gesetze der Schwere und die Bewegung der Lichtstrahlen sind aber Vorstellungen, welche nicht der Sinnesanschauung, sondern der mathematischen Anschauung angehören.

Diese Vorstellungsweise *a priori*, auf welcher unsre ganze Naturerkenntniss ruht, muss eine philosophisch mathematische sein. Unsrer ganzen Erkenntniss der Körperwelt liegt also eine philosophisch mathematische Erkenntniss *a priori* zu Grunde. Die wissenschaftliche Entwickelung derselben gehört der mathematischen Naturphilosophie an.

Die mathematische Naturphilosophie wird also die allgemeine und nothwendige Naturgesetzgebung *in abstracto* entwickeln. Sie enthält:

1. einen rein philosophischen Theil, welcher die metaphysischen Grundgesetze des Wesens, der Bewirkung und der Wechselwirkung in ihrer Anwendung auf die Körperwelt enthält.

2. Die Unterordnung aller mathematischen Formen der Ordnung, Zahl, Dauer, Gestalt und Bewegung unter jene metaphysischen Naturgesetze.

Diese Unterordnung ist nur dadurch möglich, dass wir den metaphysischen Grundgesetzen der Bewirkung eine Darstellung in reiner Anschauung d. h. eine Construction ihrer Begriffe unterzulegen im Stande sind. Wenn dies geschehen soll, so muss es Veränderungen d. i. Wirkungen von Ursachen geben, die einer mathematischen Construction fähig sind. Solche Veränderungen sind die Bewegungen der Körper. Die Regel der Subsumtion der mathematischen Formen unter die

metaphysischen Grundsätze ist daher in den phoronomischen Gesetzen der Bewegung enthalten, und die mathematische Naturphilosophie ist daher reine Bewegungslehre.

Die Principien der mathematischen Naturphilosophie liegen theils in den Grundbegriffen, theils in den Grundsätzen dieser Wissenschaft. Die Grundbegriffe derselben sind: Masse, Kraft und Naturtrieb oder Naturprocess. Zu diesen Begriffen kommt man dadurch, dass man die rein metaphysischen Grundbegriffe von Wesen, Ursach und Gemeinschaft oder Wechselwirkung auf die Körperwelt d. h. auf die Materie im Raum anwendet. Zu jenen metaphysischen Begriffen gesellen sich dann noch die rein phoronomischen Grundbegriffe: Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Grösse der Bewegung.

Die Grundsätze der mathematischen Naturphilosophie sind die Grundgesetze der Mechanik und diese sind: 1. das Gesetz der Beharrlichkeit der Masse, 2. das Gesetz der Trägheit, 3. das Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, 4. der Grundsatz der Relativität aller Bewegung, 5. der Grundsatz der Quantität der Bewegung, 6. das Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit.

Die drei ersten sind nichts anderes als die rein metaphysischen Grundsätze der Beharrlichkeit der Wesen, der Causalität und der Wechselwirkung angewendet auf die Substanz der Körperwelt, die Materie im Raum. Der vierte ist der Grundsatz der reinen Phoronomie: er beruht auf dem Verhältniss der Sinnesanschauung zur mathematischen Anschauung. Der Raum ist nämlich ein Gegenstand der reinen, aber kein Gegenstand der empirischen Anschauung, er selbst kann nicht beobachtet werden, sondern nur die Gegenstände im Raum. Die Wirklichkeit der Bewegung kann daher auch nicht in Bezug auf den Raum selbst, sondern nur in Bezug auf die in demselben befindlichen Gegenstände wahrgenommen werden.

Das cartesische Gesetz der Grösse der Bewegung entspringt aus der Anwendung des phoronomischen Gesetzes der Zusammensetzung der Bewegung auf den Begriff der Masse. Quantität ist nämlich nichts anderes, als Zusammensetzung des

Gleichartigen und Quantität der Bewegung Zusammensetzung vieler einander gleichartiger Bewegungen zu einer einzigen. Ist daher das Bewegliche nicht bloss ein Punkt, sondern eine Masse, welche aus vielen aussereinander befindlichen Theilen zusammengesetzt ist, so besteht die Quantität der Bewegung auch nicht in der blossen Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, sondern aus der Zusammensetzung aller Massentheilchen mit ihren Geschwindigkeiten in Verbindung mit einander d. h. aus dem Product der Masse in ihre Geschwindigkeit.

Da aber die Masse ins Unendliche theilbar, die Anzahl ihrer Theile also nicht angebbar ist, so kann die Quantität der Materie d. i. die Masse nur gemessen werden unter Voraussetzung des Gesetzes der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, indem wir beobachten, wie Massen, die gleichgeschwind nach entgegengesetzter Richtung bewegt werden, einander das Gleichgewicht halten. Die Quantität der Bewegung wird daher für uns unter Voraussetzung des Gesetzes der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zum Maass der Masse selbst, wie beim Gewicht.

Das Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit (oder allgemiener: der Verhältnissmässigkeit der Wirkung mit ihrer Ursache) geht unmittelbar aus der Verbindung der Grössenbegriffe oder der Maassbestimmungen mit dem Causalgesetz hervor. Das Maass der Kraft ist ihre Wirkung. Die Wirkung einer mechanischen Grundursache oder einer Grundkraft ist aber die durch sie erzeugte Bewegung eines Körpers d. i. die durch sie bewirkte Beschleunigung. Nennt man, wie es in der Mechanik üblich ist, die gleichförmige Beschleunigung p, die Geschwindigkeit v, den Weg s und die Zeit t, so wird bei gleichförmig beschleunigter von Null anfangender gradliniger Bewegung die Wirkung der Kraft durch $p = \frac{v}{t} = \frac{2s}{t^2}$ gemessen. Ist nun der zurückgelegte Weg eine Function der Zeit, $s = \varphi(t)$, so ist die augenblickliche Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$; die Veränderung dieser Geschwindigkeit dv ist aber gleich dem Product aus der

augenblicklichen Intensität der stetigen Beschleunigung $= f$ in die Zeit ihrer Dauer $= dt$, also $dv = f.\ dt$. Mithin $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}$ das allgemeine Maass der Beschleunigung. So ist die Kraft bekannt durch die Geschwindigkeit oder den Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen sie in gegebener Zeit erzeugt, die Geschwindigkeit durch den Raum, der in gegebener Zeit durchlaufen wird und dieser Raum ist als eine Function der Zeit gegeben.

Ist f die Wirkung einer Grundkraft, so hängt es ab 1. von dem Grade der Kraft selbst $= k$, 2. von der Quantität der wirkenden Masse $= m$ und 3. von einer Function der Entfernung von der wirkenden Masse $= \varphi(a)$. Demnach ist $f = km\varphi(a)$. Für einen bestimmten Fall muss der Werth von f der Beobachtung abgefragt werden.

Newton nennt f beschleunigende Kraft und bezieht sie auf den Ort des Körpers, auf den die Wirkung erfolgt, km nennt er absolute Kraft und bezieht sie auf den Mittelpunkt des Wirkungskreises. Dabei macht er die Voraussetzung, dass k, die Intensität der Kraft (der Gravitation) für alle Weltkörper gleich sei. Diese Voraussetzung wird durch die Erfahrung wenigstens für unser Planetensystem bestätigt. In diesem hängt f bei gleicher Entfernung nur vom m ab. Das Product der Quantität der Materie in die Intensität der Kraft km ist es, was man in der Astronomie die Masse zu nennen pflegt.

Daniel Bernoulli hat die Erinnerung gemacht, dass das Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit bloss ein zufälliges sei, indem dv ebenso gut dem Quadrat oder einer andern Potenz von f proportional sein könne und auch Laplace glaubte dasselbe durch Erfahrung beweisen zu müssen. Dies ist jedoch eine Irrung. Wenn ein Naturforscher einen Fall fände, bei welchem die beobachtete Grösse der Veränderung einer Bewegung mit der anderweit bereits bekannten Intensität der Kraft nicht übereinstimmte, so würde er das Gesetz $f = \frac{dv}{dt}$ nicht in Zweifel ziehen, sondern er würde vermuthen, dass ausser der zur Erklärung der Erscheinung

angenommenen Kraft noch andere Kräfte mit im Spiele seien. Es lässt sich gar keine Beobachtung machen, die diesem Gesetze zuwider wäre, eben weil es nicht aus der Erfahrung folgt, sondern vor jeder bestimmten Erfahrung schon *a priori* feststeht. Jede Veränderung steht als die Wirkung einer Ursache mit dieser ihrer Ursache in einer nothwendigen Verknüpfung und in keinem bloss zufälligen Zusammenhange, und ebenso nothwendig ist es, dass die Grösse der Wirkung der Grösse der zu ihrer Erzeugung verwendeten Kraft entsprechen müsse. Ohne dieses Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit würden wir die Kräfte selbst gar nicht zu messen im Stande sein. Denn nur die Gegenstände der Anschauung sind messbar. Die Kraft ist aber kein Gegenstand der Anschauung, sondern der Gegenstand eines reinen Begriffs d. h. der Begriff der Kraft ist kein mathematischer, sondern ein philosophischer Begriff. Die Kraft kann daher auch nicht unmittelbar, sondern nur vermittelst ihrer Wirkung, also vermittelst der wahrnehmbaren Veränderung, welche sie bewirkt, gemessen werden. Das Causalgesetz bildet also hier die Brücke von der Anschauung zum reinen Begriff, es führt aus dem Gebiet der mathematischen in das Gebiet der philosophischen Erkenntnissweise hinüber. *)

Die hier aufgezählten Grundsätze der mathematischen Naturphilosophie sind die nothwendigen Gesetze, an welche ohne Ausnahme alle in der Natur wirkenden Grundkräfte gebunden sind. Welche Arten von Grundkräften aber in der Natur überhaupt vorkommen können, lässt sich auf folgende Weise übersehen. Diese Kräfte sind die Grundursachen der Erzeugung neuer und der Veränderung schon bestehender

*) Es ist daher ein unrichtiger Ausdruck, wenn man, wie Whewell, die Schwere oder die Gravitation eine „verborgene" Eigenschaft der Materie nennt. Denn wir kennen sie und sie kann nur eine unsichtbare Eigenschaft der Materie genannt werden, weil sie eine Kraft ist. Die Kraft ist aber kein Gegenstand der Anschauung, sondern ein Gegenstand des reinen Denkens, sie kann nur durch einen reinen Verstandesbegriff, nämlich den der Ursache vorgestellt werden — ein Begriff, der, als bloss im Verstande entsprungen, sich nicht construiren d. h. nicht in der Anschauung darstellen lässt.

Bewegungen. Eine solche Kraft kann nur geradlinige Bewegung erzeugen, sie wirkt von ihrem Sitz aus unmittelbar und in gerader Richtung auf den Körper, auf den die Wirkung erfolgt. Jede krummlinige Bewegung eines Körpers ist durch stetige Veränderung der Richtung aus geradlinigen zusammengesetzt und muss durch diese Zusammensetzung aus ihren Grundverhältnissen erklärt werden. Alle Grundkräfte sind daher entweder Kräfte der Anziehung oder Kräfte der Abstossung und eine solche Kraft kann entweder in der Berührung oder in die Ferne wirken. Wir erhalten also im Ganzen 4 Formen möglicher Grundkräfte: 1. Anziehungskräfte in die Ferne; 2. Abstossungskräfte in die Ferne; 3. Anziehungskräfte in der Berührung und 4. Abstossungskräfte in der Berührung.

Jede Grundkraft ist eine unmittelbare unveränderliche Eigenschaft ihrer Masse; sie wirkt von Punkt zu Punkt in den in Gegenwirkung begriffenen Massen ununterbrochen die Zeit hindurch als eine stetig beschleunigende Kraft, die Wirkungen, welche sie äussert d. h. die Beschleunigungen, welche sie hervorbringt, hängen ab:

1. von der Intensität der Kraft d. i. dem Grade ihrer Wirksamkeit;

2. von der Quantität der wirkenden Masse und der Form ihrer Vertheilung im Raume;

3. von dem Gesetz der Wirksamkeit der Kraft selbst d. h. die Beschleunigung ist irgend eine Function des räumlichen Verhältnisses der wirkenden Massen (der Entfernung.)

Wenn eine Kraft allseitig in die Ferne wirkt, so ist ihre Wirksamkeit von dem Mittelpunkte der Kraft aus rund herum durch den Raum ausgebreitet. Der Raum selbst aber verbreitet sich um diesen Punkt im Verhältniss der Kugeln um ihn als Mittelpunkt. In einer bestimmten Entfernung von diesem Punkte ist daher das Maass der gleichförmigen Ausbreitung des Raumes um ihn in der Oberfläche einer Kugel gegeben, welche um ihn mit der gegebenen Entfernung als Halbmesser beschrieben ist. Diese Kugeloberflächen verhalten sich aber wie die Quadrate der Halbmesser d. i. wie die Quadrate der

Entfernung. Breitet sich also die Intensität der wirkenden Kraft von ihrem Sitze aus allseitig nach demselben Verhältniss wie der Raum selbst aus, so wird sie sich mit dem Quadrat der Entfernung vermindern, ihre Intensität also an jedem Orte des Raumes im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung von ihrem Mittelpunkte stehen. Ein einfacheres Verhältniss der Ausbreitung einer den Raum durchdringenden Kraft als das der Ausbreitung des Raumes selbst, giebt es nicht. Wo uns daher die Erfahrung ein solches Verhältniss zeigt, haben wir naturphilosophisch immer die Präsumtion für uns, bei dem Grundverhältniss einer solchen Kraft angelangt zu sein. Dies ist bei der Gravitation der Fall.

Wenn die Kraft einer Masse hingegen in der Berührung, also in dem Raum, den die Masse einnimmt, wirkt, so muss sie als ursprüngliche Kraft in jedem Theile des Raumes nach dem Verhältniss wirksam sein, nach dem viel oder wenig von ihr in diesem Raume gegenwärtig ist. Das Quantum der Kraft hängt aber hier ausser ihrer Intensität von der Quantität der in demselben Raume vorhandenen Masse d. h. von der Dichtigkeit dieser Masse ab. Jede solche Kraft wird also im geraden Verhältniss der Dichtigkeit ihrer Massen, also im umgekehrten Verhältniss des Volumens derselben, also für ähnliche Volumina im umgekehrten Verhältniss der Würfel ähnlich liegender Linien stehen. Dies ist nun genau das Mariottesche Gesetz, demzufolge elastische Flüssigkeiten einen dem Druck proportionalen Widerstand ausüben, woraus wir schliessen, dass die Expansivkraft der Luft und der Gase eine solche ursprüngliche Zurückstossungskraft in der Berührung, also eine Grundkraft der Materie ist.

Dagegen sucht Newton zu beweisen,*) dass wenn die Dichtigkeit einer elastischen Flüssigkeit sich wie der Druck verhält, die Abstossungskräfte der einzelnen Theilchen sich umgekehrt wie ihre Entfernungen von einander verhalten.

Gesetzt ein elastisches Fluidum werde aus einem grössern Würfel in einen kleinern zusammengedrückt und die Druck-

*) *Princ. phil. nat. math. Lib. 2. Prop. 23.*

kraft, mit welcher dies geschieht, verhalte sich auf gleicher Druckfläche wie die m^{te} Potenz der Dichtigkeit des Fluidums. Setzt man die Seite des Würfels $= \alpha$, so wird sich die Dichtigkeit, da sie umgekehrt dem Volumen proportional ist, wie $\frac{1}{\alpha^3}$, also die Druckkraft wie $\frac{1}{\alpha^{3m}}$ verhalten. Nimmt man nun an, dass dieser äusseren Druckkraft durch eine innere Ausdehnungskraft der elastischen Flüssigkeit das Gleichgewicht gehalten werde, welche daher entsteht, dass die nächsten Theilchen einander im umgekehrten Verhältniss der n^{ten} Potenz der Entfernung zurückstossen, so wird diese der Druckkraft gleiche Expansivkraft im zusammengesetzten Verhältniss der an einer bestimmten Druckfläche wirkenden Theile mit der Kraft jedes Theiles stehen. Die Oberflächen der Würfel nehmen aber mit dem Quadrat der Seite ab, folglich die an einer Druckfläche wirkenden Theile im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Seite d. h. wie $\frac{1}{\alpha^2}$ zu. Die Entfernung der nächsten Theile von einander nimmt aber mit der Vergrösserung oder Verkleinerung des Würfels zu oder ab, verhält sich also wie die Seite des Würfels α und die Wirkung jedes Theils also wie $\frac{1}{\alpha^n}$. Mithin ist das Maass der Expansivkraft $\frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^{3m}}$ d. i. = dem Maasse der Druckkraft. Folglich $\frac{\alpha^{3m}}{\alpha^2} = \alpha^n$ und $n = 3m - 2$ d. h. die zurückstossende, nur zwischen den nächsten Theilen wirksame Kraft in einer elastischen Flüssigkeit steht in dem umgekehrten Verhältniss der $(3m-2)^{ten}$ Potenz der Entfernung dieser Theile, wenn die Kraft der Zusammendrückung im graden Verhältniss der m^{ten} Potenz der Dichtigkeit steht.

Nach dem Mariotteschen Gesetz verhalten sich aber die Druckkräfte und mithin auch die Expansivkräfte einfach wie die Dichtigkeiten. Dies giebt $m = 1$ und daraus folgt auch $n = 1$. Die zurückstossenden Kräfte stehen also im umgekehrten Verhältniss der Entfernungen.

Allein diese Newtonsche Erklärung der ausdehnsamen Flüssigkeit kann keine Erklärung aus Grundkräften sein, denn es lässt sich streng mathematisch beweisen, dass bei Grundkräften, die von Punkt zu Punkt im umgekehrten Verhältniss der ersten oder zweiten Potenz der Entfernung wirken, die Wirkung in der Berührung verschwindet. Die Newtonsche Construction misst die Gegenwirkung, wie bei geradlinigen Federn, nur nach jeder der drei Dimensionen des Raumes besonders und nicht allseitig. Sie entspricht daher nicht vollständig dem Mariotteschen Gesetz.

Unter den Grundsätzen der Mechanik also gelangt die mathematische Naturphilosophie auf dem Wege der Demonstration zu ihren Lehrsätzen von den Naturkräften und den Formen ihrer Gegenwirkungen. Aber diese Lehrsätze (Theoremata) der mathematischen Naturphilosophie sind für sich nur Formen möglicher Erfahrung, aber noch keine bestimmten Erklärungsgründe. Nicht die Naturphilosophie, sondern die Induction sagt uns, dass in einem bestimmten Kreis von Erscheinungen eine solche Form der Erfahrung auch als wirklicher Erklärungsgrund gelte; erst die Erfahrung lässt uns den numerischen Werth der Intensität der wirkenden Kraft erkennen, den die reine Theorie unbestimmt lässt. Allein die Induction hat ihrerseits für sich kein Urtheil über die Natur dieses Erklärungsgrundes, sie kann nicht bestimmen, ob das Gesetz, welches sie gefunden, ein Grundgesetz sei, oder ob es auf andere einfachere zurückgeführt werden müsse.

Die Naturphilosophie leitet also den Naturforscher nur im Suchen, sie enthält die rechte Disciplin der Hypothesen. Sie zeigt uns die möglichen Erklärungsgründe über die Natur der Körper *in abstracto*, bestimmt, welche Voraussetzungen zulässig sind, welche als die einfachsten von allen anzusehen sind und welche mathematisch bestimmbaren Folgen jede einzelne solche Voraussetzung mit sich führe. Sie ist also die wahre Rüstkammer aller Hypothesen und Erklärungsgründe, sie giebt in letzter Instanz die Entscheidung über die Vollgiltigkeit der Naturgesetze.

Keine Naturwissenschaft ist besser geeignet dieses Ver-

hältniss der mathematischen Naturphilosophie zur Induction und den Unterschied zwischen einer bloss abstracten Form möglicher Erfahrung und einem wirklichen (assertorisch giltigen) Naturgesetz zu veranschaulichen, als die Astronomie, eben weil sie eine theoretisch vollendete Wissenschaft ist.

Dass die Figur der Planetenbahnen eine Ellipse ist, war von Keppler durch Induction als ein Factum constatirt worden. Er selbst sagt deshalb von der elliptischen Figur der Marsbahn, sie sei ein *Phaenomenon demonstrationibus enucleatum*. Diese Thatsache ist später von Newton bewiesen d. i. als die Wirkung einer bestimmten Ursache theoretisch abgeleitet worden. Aber es würde unmöglich sein, aus diesem theoretischen Erklärungsgrunde die Marsbahn selbst abzuleiten, weil hier die Zufälligkeit der Elemente dazwischen tritt. Aus dem Gravitationsgesetz kann man zwar die Nothwendigkeit der Kepplerschen Gesetze im Allgemeinen beweisen, aber die Art des Kegelschnitts im besonderen Fall (ob Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel), die Grösse und Form der Ellipse im einzelnen Fall bleibt zufolge des Verhältnisses der Tangentialbewegung zur Anziehung der Sonne zufällig. Ferner von dem Gravitationsgesetz selbst kann man zwar naturphilosophisch zeigen, dass es das einfachste und natürlichste Gesetz für eine von einem Punkte aus in die Ferne wirkende Kraft sei, wenn sie wie der Raum selbst sich ausbreitet, aber dass es das wirkliche Naturgesetz ist, steht doch nur inductorisch fest. Die Induction zeigt die in der Natur wirklich geltende *Forma*, aber nicht die Nothwendigkeit derselben. Ob ein Naturgesetz ein Grundgesetz ist, darüber kann nicht die Induction, sondern nur die Naturphilosophie entscheiden und die Naturphilosophie hat in der That dem Gesetz der Gravitation das Gepräge der Giltigkeit für eine in der Natur wirkende Grundkraft aufgedrückt.

Diese Betrachtung kann ein Licht auf eine merkwürdige Controverse zwischen Bessel und Laplace werfen. Laplace hat in seiner Mechanik des Himmels wiederholt die Ueberzeugung ausgesprochen, das Newtonsche Gesetz der Anziehung sei hinreichend, alle Bewegungen der Himmelskörper zu

erklären. Bessel bemerkt dagegen, *) dass wir in dem Uranus einen Fall besitzen, auf welchen der Laplacesche Ausspruch sicher nicht anwendbar sei und er hält es für möglich, dass ausser der Gravitation noch eine andere Ursache auf die Bewegung der Himmelskörper mitwirken könne **) und dass diese unbekannte Ursach einen wenn auch kleinen Zusatz zu der jetzt bekannten Theorie erfordern könne. Bessel hatte bereits bemerkt, dass nach Abzug der Störungen, welche Saturn und Jupiter im Laufe des Uranus verursachen, keine rein elliptische Bahn des Uranus übrig blieb. Aber anstatt den Grund hiervon in einem zur Zeit noch verborgenen störenden Körper zu suchen, suchte er ihn anfangs in einem Mangel des Gravitationsgesetzes selbst, als ob dieses noch eines zur Zeit versteckten Ergänzungsstückes bedürfe, so wie es selbst für die theoretische Bestimmung eines Planetenortes die Kepplerschen Gesetze erst vervollständigt. Die wahre Bewegung der Himmelskörper, so schliesst er, weicht von der Bewegung ab, welche die Kepplerschen Gesetze allein vorschreiben. Diese Abweichung (die sogenannten Störungen) erklärt sich aus dem Gesetz der Gravitation. Wenn sich nun aber die beobachteten Abweichungen nicht vollständig aus dem Gesetz der Gravitation erklären lassen, so sei dies ein Beweis, dass die himmlischen Bewegungen nicht genau dem Gesetz der Gravitation gehorchen und die beobachteten Abweichungen könnten nur in einer neuen physischen Entdeckung ihre Erklärung finden. Was heisst, fragen wir, physische Entdeckung? Eine physische Entdeckung, die der Erklärungsgrund von Erscheinungen sein soll, muss ein Gesetz sein. Allein jene Abweichungen haben durch Le Verriers Entdeckung des Neptun ihre Erklärung bereits gefunden und zwar nicht in einem bis dahin unbekannten Gesetz, sondern in einem bis dahin unbekannten Gegenstande, der unter dem bekannten Gesetz der Gravitation steht. Bessel wusste also nicht, ob er nach einem neuen Gesetz oder nach einem neuen Gegenstande, als der noch unbekannten

*) Populäre Vorlesungen S. 449.
**) Ebendas. S. 20.

Ursache der beobachteten Störungen, suchen sollte und wurde durch eine falsche naturphilosophische Ansicht von der Naturgesetzgebung um eine der schönsten Entdeckungen der neuern Zeit betrogen.

Gegenstand der Induction ist für die Naturforschung eigentlich die Form der Einheit eines Ganzen. Eine solche Form des Ganzen ist nun entweder eine reinanschauliche Form der Zusammensetzung oder eine nur denkbare Form der Verknüpfung d. i. ein Gesetz der Wechselwirkung. *) Ein Ganzes der Wechselwirkung, das von einem Gesetz beherrscht wird, heisst ein Naturprocess. An jedem Naturprocess muss man daher zweierlei unterscheiden: die Form des Mechanismus desselben oder die Beziehung zu Raum und Zeit und das Gesetz, nach welchem die Kräfte eines solchen Mechanismus wirken oder die Beziehung zu Masse und Kraft. Für die Naturforschung stehen daher zwei inductorische Aufgaben neben einander:

1. die Construction des Mechanismus für jeden physikalischen Process zu suchen,

2. das Naturgesetz zu entdecken, von dem ein solcher Naturprocess abhängt.

Das erstere geschieht durch eine Induction unter kategorischer Form, das andere durch eine Induction unter hypothetischer Form. Das erstere führt zu einer bloss phoronomischen oder, wie Whewell sagt, zu einer formellen Theorie, das andere führt zu einer physischen oder mechanischen Theorie. Bei der astronomischen Erforschung des Sternenlaufes löste die erstere Aufgabe Keppler durch seine elliptische Theorie der Bewegung der Planeten, die letztere Newton durch seine Gravitationstheorie.

Der Grundsatz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung schreibt jeder Form der Wechselwirkung in der Körperwelt einen Mechanismus vor, dessen bestimmte Form einerseits von der Natur der in Gegenwirkung begriffenen Kräfte,

*) Dieser Unterschied beruht auf der Verschiedenheit der rein philosophischen Form von der rein mathematischen Form unserer Erkenntniss.

andererseits von den räumlichen Bedingungen abhängt, unter denen die in Gegenwirkung befindlichen Massen auf einander wirken. Nach jenem Grundgesetz der Mechanik muss nämlich jeder Naturprocess den Gang einer Maschine haben, in dem Wirkung und Gegenwirkung, Kraft und Last mit einander im ruhenden oder beweglichen Gleichgewicht stehen müssen. Welche Kräfte aber in einem solchen Ganzen der Wechselwirkung thätig sind und nach welchem Gesetz sie die Massen ziehen, stossen oder drücken, muss man in jedem besonderen Falle inductorisch der Erfahrung abfragen. Das inductorisch gefundene Gesetz der Wirksamkeit einer solchen Kraft, welches den Mechanismus eines Naturprocesses an den Grundsatz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung knüpft, ist es, was man in prägnanterer Bedeutung „das Naturgesetz" zu nennen pflegt. Die Inductionen, welche zur Entdeckung dieser Gesetze führen, werden von den im Vorigen angegebenen Principien der mathematischen Naturphilosophie geleitet und wir können jetzt noch genauer angeben, wie die Grundbegriffe und Grundsätze sowie die Lehrsätze der mathematischen Naturphilosophie jenen Inductionen als leitende Maximen dienen.

Das Gesetz der Causalität nöthigt uns, jede Veränderung, die wir beobachten, als die Wirkung einer Ursache zu betrachten und das Gesetz der Trägheit sagt uns, dass diese Ursache in der Körperwelt eine äussere sein müsse. Aber die verborgene Ursache, die gerade diese Veränderung bewirkt, kann man nur inductorisch finden. Beobachtung und Erfahrung muss uns da zuerst sagen, dass die beiden Dinge immer zusammen sind, dass das Eine stattfindet, wenn das Andere stattfindet. Aber das reicht noch nicht aus. Der Mond z. B. ist nicht die Ursach der Nachtfröste und der Thaubildung, sondern nur der Zuschauer derselben. Bei jeder Fäulniss sind Pilze und Infusorien vorhanden, aber diese sind nicht die Ursache, sondern nur die Begleiter dieses Zustandes. Ausser der Beobachtung der ununterbrochenen Zeitfolge gehört auch noch die Einsicht in die Natur der wirkenden Ursache dazu, um ein sicheres Urtheil über dieselbe zu gewinnen. Vollständig

wird die Induction hier nur dann, wenn man das Verhältniss von Ursach und Wirkung nach dem Gesetz der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit beurtheilen kann. Dazu gehört zweierlei:

1. Muss man das Gesetz kennen, nach dem die Ursache (die Kraft) wirkt, um die Grösse ihrer Wirkung unter allen Umständen und an allen Punkten des Raumes berechnen zu können.

2. Muss man die in der Beobachtung gegebene Veränderung messen können.

Wenn die gemessene Grösse der Veränderung der berechneten Grösse der Kraft an dieser Stelle genau gleich ist, so ist man gewiss, die wahre Ursache (*vera causa*) gefunden zu haben. So verfuhr Newton beim Mondlauf. Nach dem Gesetz der Gravitation berechnete er die Wirkung der Schwerkraft der Erde in der Gegend der Mondbahn ihrer Grösse nach. Aus der durch Beobachtung bekannten Mondbewegung konnte er aber für irgend einen Zeittheil den Fall des Mondes gegen die Erde d. i. die Veränderung bestimmen, die der ursprüngliche Zustand der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung des Mondes durch die Anziehungskraft der Erde während jener Zeit erleidet. Da diese Veränderung genau ebenso gross gefunden wurde, wie es die Grösse der Kraft an jener Stelle verlangte, so war Newton gewiss, dass jene Veränderung die Wirkung der Schwerkraft der Erde ist d. h. dass der Mond nach dem Gesetze der Schwere gegen die Erde fällt.

Das Naturgesetz, welches den Mechanismus eines physischen Processes regelt, hat, da es auf der Grenze der empirischen und der philosophisch mathematischen Erkenntnissweise liegt, einen doppelten Charakter: es ist auf der einen Seite ein Lehrsatz (Theorem) der mathematischen Naturphilosophie, auf der andern Seite ein inductiver Erfahrungssatz. Das Naturgesetz ist das Gesetz der wirkenden Kraft, welches den Mechanismus eines Naturprocesses an das Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung und somit an die Grundsätze der Mechanik bindet. Es muss also, so zu sagen, das Naturgesetz auf der Linie liegen, die von dem Gesetz der

Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung herkommt. Es muss aber auch in der Richtung auzutreffen sein, die durch die inductorische Erforschung des Baus und Ganges der Maschine d. i. des Mechanismus des Naturprocesses bestimmt wird. Also muss es auf dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beider Linien liegen. So bekommt man durch die Verbindung der mathematischen Naturphilosophie mit den Inductionen den Punkt, auf den die Forschung losgehen muss. Lässt man dagegen die mathematische Naturphilosophie fallen, so hat man nur die Richtung, in der es liegt, aber noch nicht den Ort in dieser Richtung. Man ist dann nie sicher, dass man den wahren Coincidenzpunkt zwischen Empirie und reiner Mathematik gefunden hat.

Die Naturgesetze sind die letzten Erklärungsgründe, die letzten Principien unserer Einsicht in die Natur der Dinge. Wir dürfen uns daher nie auf den Willen Gottes oder eine diesem gemässe Zweckmässigkeit bei der Erklärung der Naturerscheinungen berufen. Teleologische Erklärungsgründe sind in den Naturwissenschaften unzulässig.

In der Natur sind die physischen Gesetze von gleicher Nothwendigkeit wie die mathematischen uud philosophischen. Aber für die menschliche Erkenntniss ist ein Unterschied darin, wie wir zu ihnen gelangen. Die mathematischen und philosophischen (z. B. das Causalgesetz, das Trägheitsgesetz) vermögen wir unmittelbar einzusehen, die physischen dagegen (die Naturgesetze) lernen wir erst durch Induction mittelst der Beobachtung und Erfahrung kennen. Daher behält wohl die Einsicht in dieselben etwas für den Menschen Zufälliges, aber keineswegs die Wahrheit der Gesetze selbst. Aus der Verwechselung dieser subjectiven Verhältnisse menschlicher Erkenntnissgründe mit den objectiven Gesetzen der nothwendigen Wahrheiten entspringt für den, der auf dem Standpunkte der Teleologie steht, die Illusion, als ob die physischen Wahrheiten vom Belieben und Willen Gottes abhingen. Einen durchgehenden Irrthum der Art findet man unter andern in Whewells Schrift über die Sternenwelt.

Wir können dreist behaupten, dass niemals ein Analogon

des Gesetzes der Beharrlichkeit der Masse, des Gesetzes der Trägheit und des Gesetzes der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gefunden werden wird, wohl aber Gesetze, durch die die Erscheinungen sich jenen Grundgesetzen unterwerfen. Diese Behauptung rechtfertigt sich dadurch, weil die genannten Gesetze philosophische Grundsätze sind, von denen man sich *a priori* bloss durch Speculation eine vollständige Uebersicht verschaffen kann. Es sind Wahrheiten, die immer in dem Geiste des Menschen leben und von denen man kaum sagen kann, dass sie zu einer bestimmten Zeit entdeckt worden sind, so wie neue Thatsachen oder neue physische Gesetze entdeckt werden. Es hat eine Zeit gegeben, wo die Lehre des Copernicus von der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne nicht ebenso gewiss war, als sie es heut zu Tage ist. Aber es hat, was auch John Mill davon fabelt, niemals eine Zeit gegeben, wo das Gesetz der Causalität nicht denselben Grad der Gewissheit gehabt hätte, den es heut zu Tage hat. Es lässt sich nicht angeben, wer das Gesetz der Trägheit zuerst entdeckt habe oder wann dem Galilei das Licht der deutlichen Erkenntniss desselben aufgegangen sei. Newton hat selbst das Gesetz der Beharrlichkeit der Masse und Kraft nicht ausdrücklich und *in abstracto* ausgesprochen, obwohl er es stillschweigend voraussetzt. Aber es bezeichnet jederzeit eine neue Epoche in den Wissenschaften, wenn ein grosser und umfassender Geist eine neue Disciplin auf einen dieser Grundsätze gründet und eine Anwendung von ihm macht auf ein Gebiet der Erkenntniss, in welchen man bis dahin noch keinen wissenschaftlichen Gebrauch von ihm zu machen wusste. So hat Galilei den Grundsatz der Trägheit in die Mechanik, Newton den Grundsatz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung in die Astronomie und Lavoisier den Grundsatz der Beharrlichkeit der Masse vermittelst der Wage in die Chemie eingeführt.

---

11. Die inductorischen Aufgaben der Naturforschung.

Die Formen der Wechselwirkung in der Körperwelt, die verschiedenen Mechanismen physikalischer Processe, sind einerseits durch die Grundkräfte der Materie, andererseits durch die Formen der Aggregation bedingt. Da sich die einen wie die andern naturphilosophisch anticipiren lassen, so erhalten wir folgende naturphilosophische Uebersicht der Grundformen der Morphologie:

1. Gravitationsprocesse, die Processe unter der Herrschaft anziehender Kräfte in die Ferne. Dies giebt die astronomische Aufgabe: die Mechanik des Himmels, die bis jetzt unter allen physikalischen Aufgaben allein vollständig gelöst ist.

Es ist ein charakteristischer Umstand des Newtonschen Gesetzes, dass die Massenanziehung zwischen den einzelnen Theilen eines Weltkörpers so wirkt, als ob ihre ganze Kraft in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Wenn nun ein Weltkörper gegen einen solchen anziehenden Punkt oder gegen einen Centralkörper, der nach dem Gesetze der Gravitation wirkt, so geworfen wird, dass die Richtung seiner Wurfbewegung mit der Richtung der anziehenden Kraft nicht zusammenfällt, so wird der geworfene Körper um den Centralkörper einen Kegelschnitt beschreiben, in dessen einem Brennpunkte der Centralkörper sich befindet. Die Grundkraft der Gravitation reicht also für sich noch nicht hin, um den Mechanismus der Ellipsenbewegung des Planetensystems zu erzeugen. Es muss nämlich noch eine bestimmte Richtung und Geschwindigkeit der Wurfbewegung oder der Tangentialbewegung hinzu kommen.*) Diese gleichförmig gradlinige Wurfbewegung,

*) Man hört wohl öfters sagen, die Bewegung der Planeten um die Sonne muss doch einen Anfang genommen haben. Allein in der Construction der Centralbewegung giebt es keinen Ruhepunkt, keinen Ort der Ruhe; sondern an jedem Orte der Bahn findet man den Planeten in Bewegung. Man braucht also auch für die Erklärung des Planetenlaufs keinen solchen Ort, wo der Körper einmal geruht hätte. Die

welche eine Folge von dem früheren Zustande des Systems ist, sowie ihre Richtung ist aber eine bloss geometrische Bedingung, welche von dem Gesetz der Grundkraft ganz unabhängig ist. In jeder Form der Wechselwirkung kommt also immer neben dem metaphysischen Verhältniss der Grundkräfte noch rein geometrisch das Verhältniss der bewegten Massen zum Raum in Frage und nur durch die Verbindung von beiden lässt sich das Gesetz der Wechselwirkung und die Form des Mechanismus eines solchen Naturprocesses bestimmen. So beruht das eigentliche Triebwerk des Planetensystems auf der Zusammensetzung der Tangentialbewegung jedes einzelnen Planeten mit der Anziehungskraft der Sonne. Ein solches geschlossenes Ganzes der Wechselwirkung wird, wiefern es durch seine Form der Zusammensetzung und Wechselwirkung Ursach von Veränderung ist, Naturtrieb genannt. So ist z. B. der jährliche Umlauf der Erde um die Sonne die Ursach von dem Wechsel der Jahreszeiten. Hier erscheint also kein Gegenstand d. i. kein Einzelwesen, sondern eine bestimmte Form der Wechselwirkung als Ursach von Veränderungen.

Die morphologische Aufgabe der mathematischen Naturphilosophie wäre daher: die Hauptarten der Naturtriebe mathematisch zu construiren. Wir dürfen nämlich zum Erklärungsgrund eines physikalischen Processes nie unmittelbar einen besondern Stoff oder eine besondere Kraft voraussetzen, sondern dieser Erklärungsgrund

---

Annahme eines solchen entsteht nur daher, dass man den Begriff der Ruhe mit dem der Trägheit identificirt. Wenn nun aber das Band der Gravitation plötzlich zerrisse, so würde der Planet nicht stille stehen, sondern er würde in der Tangente der Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgehen. Diese Tangentialbewegung ist also das, was nach Aufhebung der Gravitation übrig bleibt d. h. sie (und nicht die Ruhe) ist der ursprüngliche Zustand des um die Sonne kreisenden Planeten. Wir sehen im Planetensystem ein sich selbst erhaltendes Spiel von Bewegungen in seinem Bestehen, aber nicht die Entstehung und Bildung desselben. Wir finden darin eine fortdauernde Zusammensetzung der Tangentialbewegung mit der Fallbewegung gegen die Sonne, aber weder Beobachtung noch Theorie zeigt uns einen ersten Zusammentritt beider Bewegungen.

liegt jedesmal in einem bestimmten **Naturtrieb**. Jeder Naturtrieb aber muss sich erklären lassen aus einem Gesetz der Grundkräfte und einem reinanschaulichen Verhältniss der bewegten Massen zum Raume. So zeigen alle Himmelskörper, Planeten sowohl wie Doppelsterne, einen Hang oder **Trieb** zur Ellipsenbewegung, aber wir schreiben deshalb jenen Himmelskörpern keine besondere Kraft elliptischer Bewegung zu, sondern wir construiren den Vorgang durch Zusammensetzung des Verhältnisses der ursprünglichen Wurfbewegung mit dem Gesetze der Gravitation.

Da nun das geometrische Verhältniss der Massen zum Raum, welches in allen Formen der Wechselwirkung eine so grosse Rolle spielt, nicht aus dem physikalischen Gesetz der Grundkräfte folgt und gegen dasselbe zufällig ist, so werden auch alle Gebilde der Naturtriebe eine gewisse Zufälligkeit der Form an sich tragen. Dahin gehört z. B. bei der Form unseres Planetensystems: die Schiefe der Ekliptik, das sogenannte Bodesche Gesetz der Abstände, die Neigung der Bahnen, die Grösse der Excentricitäten, die Anzahl der Planeten sowie der Monde, die Vertheilung der Massen. Alle diese Grössen können nicht aus dem Gesetz der Gravitation abgeleitet, sondern nur als zufällige Elemente der Beobachtung entlehnt werden.

2. **Undulationsprocesse** unter der Herrschaft zurückstossender Kräfte in der Berührung. Die Wirkung solcher Kräfte ist zwischen gleichartigen Stoffen, deren Theile durchdringlich gegen einander sind, Ausdehnung; zwischen solchen aber, die mechanisch undurchdringlich gegen einander sind, der Stoss. Die Verbreitung des Stosses durch tropfbare und elastische Flüssigkeiten erzeugt **Wellenbewegung**. Wir können dieses Phänomen unmittelbar beobachten auf der Fläche des Wasserspiegels. Vermittelst der Wahrnehmung des Schalls haben wir die Erkenntniss erlangt, dass es sich auch in der Luft wiederfindet. Die durch irgend einen Anstoss erregten Vibrationen einer Luftmasse tragen den Schall an unser Ohr. Newton analysirte zuerst den Hergang der Veränderungen, die dabei in jener Luftmasse vor sich gehen. Er zeigte, dass dabei ein abwechselndes Zusammenziehen und Ausdehnen der Luft-

theile in der Richtung des Stosses stattfinde. Wenn dieses Wechselspiel der Ausdehnungen und Zusammenpressungen der Luftschichten eine gewisse Regelmässigkeit annimmt, so entsteht aus dem Schall ein bestimmter Ton, dessen Höhe von der Schnelligkeit der Aufeinanderfolge der Schallwellen abhängt.

Die Theorie der Wellenbewegung hat in der neuern Zeit eine hohe Wichtigkeit erlangt durch ihre glückliche Anwendung auf die optische Aufgabe. Da man im Dunkeln nicht sieht, der blosse Anblick also nicht hinreicht die Gegenstände sichtbar zu machen, so muss offenbar noch ein gewisser Stoff dazwischentreten, welcher die Bedingung des Sichtbarwerdens enthält. Durch diese einfache Bemerkung wurde man schon sehr früh darauf geführt die Erscheinungen des Sehens von denen des Lichtes zu trennen und letztere auf eine besondere Masse zu beziehen. Dafür hatte man dann die Wahl, entweder eine strömende oder eine schwingende Masse vorauszusetzen. Nach der erstern Voraussetzung, der sogenannten Emanationshypothese, giebt es verschiedenartige Lichtstöffe, welche aus der Lichtquelle ausströmen. Nach der andern Voraussetzung, der sogenannten Undulationshypothese, giebt es ein gleichförmiges, alle Körper frei durchdringendes und durch das ganze Weltgebäude ausgebreitetes elastisches Medium, welches man Aether nennt, durch dessen Erschütterungen und Wellenspiele die Lichterscheinungen entstehen. Die Verschiedenheit der Lichtintensitäten sowie der Farben bestehen also hier nicht wie dort in einer wirklichen Verschiedenheit der Lichtstoffe, sondern in einer blossen Verschiedenheit der Aetherbewegungen. Alle Phänomene des Lichtes beruhen zufolge dieser Hypothese auf den Schwingungen eines elastischen Mediums, deren Anzahl die Farbe bestimmt, von deren Weite die Helligkeit abhängt, deren lineare, kreisförmige oder elliptische Gestalt ihre Polarisation hervorbringt.

Im Anfange dieses Jahrhunderts standen sich noch beide Hypothesen mit fast gleichen Gründen und Gegengründen gegenüber, sowie zum Anfange des siebzehnten Jahrhunderts die astronomischen Hypothesen des Ptolemäus und Coperni-

eus, aber durch die genialen Arbeiten von Young und Fresnel hat die Undulationshypothese ihre Nebenbuhlerin weit überflügelt. Das Studium der Interferenzerscheinungen führte fast unmittelbar zu der Vorstellung von Wellenbewegung im Lichtstrom. Die Farben dünner Platten, welche Newton als Anwandelungen leichter Brechung und Zurückwerfung beschrieb, die farbigen Schattenräume, welche bei der Lichtbeugung entstehen, die hyperbolischen Linien, auf welchen die Interferenzpunkte liegen, erklärten sich einfach und ungezwungen, aus der Lehre von der Interferenz der Lichtwellen. Die Phänomene der doppelten Brechung zeigten, dass die Fortpflanzung der Undulation in einem Medium stattfinde, dessen optische Elasticität nach verschiedenen Richtungen verschieden sein kann. Endlich die Erscheinungen der Polarisation zwangen Young und Fresnel von der bisherigen Vorstellung der Longitudinalschwingungen im Aether abzugehen und zu Transversalschwingungen ihre Zuflucht zu nehmen. Die Erscheinungen der Polarisation liessen sich erklären durch die Annahme, dass die Aethertheilchen senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung des Lichtstrahls (d. h. der Lichtwellen) oscilliren.*) Einen ihrer glänzendsten Triumphe feierte die Undulationshypothese als Hamilton durch Betrachtung der Fresnel'schen Wellenfläche die konische Brechung voraussagte, ehe noch die Beobachtung dieselbe gezeigt hatte. In doppeltbrechenden zweiaxigen Krystallen giebt es nämlich

*) Fresnel hat, was der Bemerkung werth ist, bei Gelegenheit der Ausbildung seiner optischen Theorien, noch bevor Gauss die geometrische Bedeutung des Imaginären bekannt machte, schon eine physikalische Anwendung davon gemacht, die ihn zu einer neuen Entdeckung führte. Als er nämlich die Bedeutung der imaginären Ausdrücke untersuchte, welche unter gewissen Umständen in den Formeln zum Vorschein kommen, welche die Vorgänge der Polarisation darstellen, wurde er darauf geführt, dass in solchen Fällen die Schwingung der Aethertheilchen gleichzeitig in zwei auf einander senkrechten Richtungen stattfinde. Das oscillirende Aethertheilchen beschreibt dann statt einer geraden Linie einen Kreis. Dies ist die circulare Polarisation, deren Dasein Fresnel zuerst durch Rechnung nachwies und erst hinterdrein durch Experimente bestätigte.

eine besondere Stellung des Krystalls, in welcher ein einzelner Lichtstrahl so gebrochen wird, dass er die Gestalt eines konischen Strahlenpinsels annimmt, sich also nicht in zwei Strahlen theilt, sondern sich in einen Lichtkegel öffnet. Die Versuche von Lloyd haben diese theoretische Vorhersagung bestätigt, welche Hamilton aus der Gestalt der Wellenfläche in doppeltbrechenden zweiaxigen Krystallen, der sogenannten Umbilix erschloss. Die Oberfläche dieser Figur, die Fresnel zuerst bestimmte, ist eine sehr verwickelte, aber symmetrische Fläche, die sich für einaxige Krystalle in eine Sphäre und in ein Sphäroid verwandelt, für zweiaxige eine continuirliche doppelte Enveloppe des Centralpunktes, zu dem sie gehört, bildet, die sich selbst schneidet, auch wieder in sich selbst zurückkehrt und so durch Einstülpung vier einwärts gebogene Hörner oder Nabel bildet, woher sie den Namen hat. Die Austrittsstelle und somit die Richtung des gebrochenen Strahls wird durch eine die Wellenfläche berührende Ebene bestimmt und nach der Construction muss der Strahl von dem Mittelpunkte der Wellenfläche zu dem Berührungspunkte mit jener Ebene gehen. Zufolge der einwärtsgebogenen Hörner ist aber für eine gewisse Lage der Wellenfläche und der berührenden Ebene jene Berührungsstelle kein Punkt, sondern ein Kreis und der gebrochene Strahl wird daher nicht in einem einzigen Punkte, sondern auf der Peripherie dieses Kreises austreten.

So ingeniös und kunstvoll auch die Undulationstheorie mathematisch entwickelt ist, so muss man doch gestehen, dass sie noch nicht hinreichend inductorisch begründet ist, dass bei ihr bisweilen Analogien die Stelle der Beweise vertreten müssen, und dass sie noch keineswegs von allen Schwierigkeiten befreit ist. Der Polarisation entspricht eine Vibrationsart, welche nach Fresnel's eigenem Geständniss mit der Natur der Vibrationen eines elastischen Mediums unverträglich erscheint. Denn wenn die Aetherschwingungen nicht longitudinal sind, sondern transversal auf der Fortpflanzungsrichtung stehen, so ist die Lichtwelle keine fortschreitende periodische Verdichtung und Verdünnung des Aethers, sondern eine fortschreitende Form der Oberfläche, in welche bei ihrem

Fortschritt successiv immer andere und andere oscillirende Aethertheilchen ein- und austreten. Eine solche fortschreitende Wellenform kann man sich recht wohl auf der Ebene des Wasserspiegels und den mit ihr parallelen Ebenen der tieferen Wasserschichten vorstellen, aber es ist schwierig zu begreifen, wie sie im Raum möglich sein soll. Man kann daher nach dieser Theorie wohl den Fortgang paralleler und polarisirter Lichtstrahlen, aber nicht so einfach und leicht die Divergenz des unpolarisirten Lichtes und dessen allseitige Ausbreitung durch den Raum von einem Punkte aus construiren. Während also die künstlichsten und verwickeltsten Phänomene des Lichtes sich mit überraschender Genauigkeit dieser Theorie der transversalen Aetherschwingungen fügen, so bereitet ihr gerade das einfache Grundgesetz der Optik, das Gesetz der quadratischen Abnahme der Lichtstärke, eine Schwierigkeit.

Es giebt indessen einen physikalischen Grund, welcher ein nicht unbeträchtliches Gewicht in die Wagschaale der Undulationstheorie legt. Betrachtet man nämlich eine Lichtflamme, so geht von jedem leuchtenden Punkt in ihr ein Lichtkegel aus und die Lichtkegel zweier solcher Punkte durchschneiden und durchdringen sich zum Theil. Nach der Emanationslehre beständen alle diese Kegel aus gleichartigen Flüssigkeiten. Gleichartige Flüssigkeiten würden sich aber mischen und zusammenfliessen, wir würden dann nur einen unbestimmten Lichteindruck empfinden und keine Gestalt der Flammen sehen. Wellenbewegungen hingegen können ungestört durch einander hindurch gehen.

Zu einer vollständigen Begründung der Undulationslehre würde vor allen Dingen erforderlich sein, dass man ohne alle hypothetische Voraussetzung bloss durch Induction aus den Beobachtungen das Dasein des Aethers und die Form des Wellenspiels in ihm zu entdecken suchte. Dies müsste durch eine Induction unter kategorischer Formgeschehen, denn es ist hier vorerst die Form des Mechanismus eines Naturprocesses und nicht die Ursache zu suchen, von der er abhängt. Solange das Dasein des Aethers, der als unsichtbares Medium

kein Gegenstand unmittelbarer Wahrnehmung und Beobachtung ist, nicht bewiesen ist, bleibt die Existenz dieses Lichtwesens problematisch so gut wie die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne vor der Entdeckung der Aberration und der Mechanik des Himmels, wenn auch alle Lichterscheinungen mit der hypothetischen Annahme desselben übereinstimmen. Ein inductorischer Beweis für das Dasein des Aethers liesse sich vielleicht aus der Vergleichung der Aberrationsconstanten verschiedener Sterne führen. Die Aberrationsconstanten aller Sterne sind, so viel wir jetzt wissen, einander gleich. Die Bewegung des Lichtes durch die Räume des Himmels ist daher gleichförmig und seine Geschwindigkeit dieselbe, es mag kommen aus welcher Lichtquelle es immer sei. Dies scheint nach dem von Newton*) Bewiesenen darauf hinzudeuten, dass die Geschwindigkeit des Lichtes bei seiner Bewegung durch den Himmelsraum nicht von einer Repulsivkraft der Lichtquelle, wie es nach der Emanationshypothese der Fall sein müsste, sondern bloss von der Elasticität des Mittels abhängt, das die Bewegung weiter trägt, und dieses Mittel ist der Aether.

3. Polarisationsprocesse unter der Vorherrschaft zurückstossender Kräfte in die Ferne. Unter der Voraussetzung strahlender Flüssigkeiten bietet der Mechanismus dieses Processes gleichsam von selbst einen Erklärungsgrund für die Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus dar. Man denke sich eine gleichartige strahlende Flüssigkeit, zwischen deren einzelnen Theilen zurückstossende Kräfte in die Ferne und in der Berührung in Verbindung mit einander wirken. Zugleich nehme man an, dass zwischen ihr und der Oberfläche gewisser fester Körper (der Nichtleiter) gleichfalls Zurückstossung in der Berührung stattfinde, so dass diese Körper in einem gewissen Grade undurchdringlich für sie sind. Verbreitet sich nun eine solche Flüssigkeit durch das Innere einer Kugel wie etwa den Conductor einer Elektrisirmaschine, so werden die einzelnen Theile gegenseitig so aufeinander wir-

*) *Princip. ph. nat. math. L. I. Prop. XCV.*

ken, als wenn die ganze Kraft der Zurückstossung im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre. Die ganze Masse wird also auseinander und nach der Oberfläche der Kugel zu getrieben. Hier aber trifft sie auf einen undurchdringlichen Körper (einen Nichtleiter), der die Kugel umgiebt (wie z. B. die Luft den Conductor). Sie wird sich daher an der Oberfläche der Kugel anhäufen. Wird nun die Zurückstossung in die Ferne immer stärker, so wird die Flüssigkeit den Widerstand der mechanischen Undurchdringlichkeit endlich beseitigen, oder, wenn er durch einen festen Körper geleistet wird, diesen letztern wohl auch zertrümmern, wie wir es bei den Erscheinungen des Blitzes beobachten. Eine einzige solche Flüssigkeit würde aber, da in ihr bloss repulsive Kräfte herrschen, sich nicht selbst das Gleichgewicht halten können und sonach unmöglich sein. Sie erfordert also zu ihrer Möglichkeit eine zweite von ihr verschiedene Flüssigkeit, von der sie ebenso angezogen wird, wie ihre einzelnen Theile sich untereinander abstossen. Erst diese beiden zusammen machen gleichsam wie die beiden einander entgegengesetzten Aeste einer Hyperbel ein Ganzes aus. Wir müssen demnach, um der Construction der Möglichkeit einer solchen Art von Materie zu genügen, zwei einander entgegengesetzte Fluida annehmen, deren gleichartige Theile sich in die Ferne sowohl wie in der Berührung abstossen und deren ungleichartige Theile sich ebenso anziehen. Auf diese Weise werden die Erscheinungen der Polarität und der Indifferenz zum Vorschein kommen. Sind nämlich positives und negatives Fluidum, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, in einem bestimmten Raume in gleichem Maasse gemischt, so werden sie sich selbst im Gleichgewicht halten, ihre Wirkungen werden sich gegenseitig vernichten und sie werden sich indifferent verhalten. Treten sie aber in eben diesem Raume durch irgend eine Ursache auseinander, so werden sie sich auf entgegengesetzten Seiten anhäufen und durch die einander entgegenwirkenden Kräfte der Anziehung und der Zurückstossung in einer gewissen Spannung sich erhalten. Es werden also entgegengesetzte Pole ihrer Wirksamkeit hervortreten. Die Gesetze der Polarität und Indifferenz bilden gerade

den hervorstechenden Charakter der elektrischen und magnetischen Phänomene. Nach Coulomb's experimentellen Untersuchungen sammelt sich die Elektricität bloss auf der Oberfläche der Conductoren, so wie es die Theorie fordert. Coulomb's Versuche mit der Drehwaage haben auch für die elektrischen und magnetischen Anziehungen und Abstossungen das Gesetz der quadratischen Abnahme in die Ferne als giltig nachgewiesen, was mit der hier aufgestellten Hypothese in vollkommener Uebereinstimmung ist. Die von Wheatstone gemessene Geschwindigkeit der Elektricität, welche ungleich grösser ist, als die des Lichtes, scheint gleichfalls dafür zu sprechen, dass sie von Repulsivkräften abhängt, die in die Ferne wirken. Aber Inductionen aus der Erfahrung hätten erst zu entscheiden, ob die hier entwickelte naturphilosophische Idee in der Natur realisirt ist, und die Ursachen zu bestimmen, welche das Auseinander- und Wiederzusammentreten der beiden Fluida bewirken.

Die mathematische Berechnung der Vertheilung von zwei solchen Flüssigkeiten, die sich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung gegenseitig anziehen und abstossen, ist ein Problem von grosser Schwierigkeit. Man kann dies schon daraus sehen, wenn man bedenkt, dass die Attraction und Repulsion von der Vertheilung und diese wieder von jenen bestimmt wird. Die erste streng mathematische Lösung dieser Aufgabe hat Biot gegeben, gestützt auf eine eigenthümliche Methode, welche Laplace anwandte, um die Vertheilung der Schwerkraft über die Oberfläche der Erde zu bestimmen. Diese Methode führt auf eine besondere Grösse, das von Gauss sogenannte Potential, die sich in eine rasch convergirende Reihe entwickeln lässt, deren einzelne Glieder so gebildet sind, dass sie aus Theilen bestehen, die einerseits von der Lage des Orts auf der Erdoberfläche, andererseits von der Vertheilung der Kraft durch das Innere der Erde abhängig sind. Diesen Umstand hat Gauss auf eine höchst scharfsinnige Weise benutzt, um vermittelst dieses Potentials die Vertheilung des Erdmagnetismus inductorisch durch Vergleichungen der Beobachtungen mit den Gliedern jener Reihe zu ermitteln. Diese Unter-

suchung hat in Verbindung mit der Messung der absoluten Magnetkraft der Erde, welche Gauss auf eine geniale Weise zu bewerkstelligen wusste, zu dem Resultat geführt, dass die Stärke des Erdmagnetismus im Innern unseres Planeten grösser ist, als an seiner Oberfläche, ein Umstand, der sich wohl daraus erklärt, dass das magnetische Fluidum an gewisse Stoffe gebunden ist.

Die Inductionen aus der Erfahrung haben uns hier bisher eine höchst sonderbare Form des Mechanismus dieser Naturprocesse zu erkennen gegeben. Die Elektrisirmaschine zeigt uns elektrische Spannung, die Voltaische Kette einen elektrischen Strom und die Experimente von Oerstedt und Faraday zeigen uns Wirbel oder spiralförmige Windungen der Strömung um eine Axe. Wie diese letztern aus den anziehenden und abstossenden Grundkräften zu erklären seien, ist bis jetzt noch eins der grössten Räthsel der Physik.*)

4. Neutralisationsprocesse, Processe der Mischung und Ausscheidung unter der Vorherrschaft anziehender Kräfte in der Berührung. Die Construction dieses Naturprocesses bildet die chemische Aufgabe der Naturwissenschaft. Auf diesem Boden haben sich die Vorurtheile der alten Atomistik am

*) Nach Mosotti ist die Gravitation der Ueberschuss der elektrischen Anziehung über die elektrische Abstossung. Diese Hypothese, welche die Gravitationsprocesse zu einem bloss untergeordneten Phänomen der Polarisationsprocesse macht, scheint mir den Principien der mathematischen Naturphilosophie gänzlich zuwider und deshalb unzulässig zu sein. Hätte Mosotti Recht, so würde die Gravitation bloss ein zufälliger und partieller Zustand der elektrischen Kräfte sein. Wenn sie aber von einem so leicht beweglichen Fluidum herrührte, so müsste die Intensität der Schwere eines und desselben Körpers veränderlich sein und durch eine Ausgleichung der elektrischen Spannungen würde sie gänzlich vernichtet. Nun gründet sich aber die Mechanik des Himmels nicht bloss auf die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Masse, sondern auch auf die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Kraft; und diese Voraussetzung macht sie mit Fug und Recht. Denn die Möglichkeit der Materie fordert schon, dass der schweren Materie selbst eine anziehende Grundkraft als ursprüngliche Eigenschaft zukomme.

hartnäckigsten gehalten und stehen noch gegenwärtig am feindseligsten den Ansichten der dynamischen Naturphilosophie gegenüber. Allein es lässt sich durch eine richtige Exposition der Grundbegriffe und durch eine unbefangene Betrachtung einfacher Thatsachen gerade hier am schlagendsten das tiefgewurzelte Vorurtheil der absoluten Undurchdringlichkeit, auf welchem das Gebäude der Atomistik ruht, widerlegen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Begriff einer chemischen Verbindung so zu analysiren, wie es E. G. Fischer in seiner Kritik der Dalton'schen Verdunstungslehre gethan hat.

Der Chemiker unterscheidet bei den Verbindungen heterogener oder ungleichartiger Stoffe die Gemenge von den Mischungen. Unter den erstern versteht er solche Verbindungen, wo sich das Ungleichartige noch als nebeneinanderliegend erkennen lässt, wie beim Granit, Gneis und allen gemengten Gebirgsarten. Bei den Mischungen dagegen befindet sich die Verbindung heterogener Stoffe in einem solchen Zustande, dass sich nichts ungleichartiges in ihnen wahrnehmen lässt. Unter den Mischungen zeigt uns nun die Erfahrung einige, bei denen jeder Stoff seine eigenthümliche Natur aufgegeben, jeder Bestandtheil seine Eigenschaften verloren hat und die Verbindung einen ganz neuen Stoff darstellt, der mit keinem seiner Bestandtheile eine Aehnlichkeit hat. Dahin gehören z. B. die Verbindungen des Sauerstoffes mit brennbaren und säuerungsfähigen Basen, ferner die neutralen Verbindungen der Säuren mit alkalischen Grundlagen. Bei einer andern Art von Mischungen ändern sich die Bestandtheile so wenig ab, dass man ihre Gegenwart in der Mischung noch durch Geschmack, Geruch, Farbe u. s. w. erkennen kann, wie z. B. bei den Auflösungen der Salze im Weingeist oder Wasser oder bei den Uebersättigungen einer neutralen Verbindung mit einem der beiden Bestandtheile. Mischungen der Art sind die Chemiker geneigt für eine bloss mechanische Verbindung ihrer Bestandtheile zu erklären. Indessen zeigt uns die Erfahrung, dass es keine Mischung giebt, in welcher nicht einige Aenderung in den Eigenschaften der Bestandtheile vorgehe.

In der einfachsten Salzauflösung hat das Salz seinen Aggregatzustand, das Wasser den Grad seiner Flüchtigkeit, beide ihr specifisches Gewicht verändert. Der angegebene Unterschied scheint also nur ein gradweiser zu sein. Worin liegt nun der wesentliche Unterschied zwischen Gemenge und Mischung?

Gemeng ist eine Verbindung ungleichartiger Stoffe, in welcher die ungleichartigen Theile neben einander liegen. Wäre die Zertheilung der ungleichartigen Bestandtheile auch so fein, dass kein Auge und kein Mikroskop sie mehr zu unterscheiden vermöchte, so wäre die Verbindung doch nur ein Gemeng und keine Mischung.

Mischung dagegen ist eine Verbindung ungleichartiger Stoffe, in welcher durchaus nichts ungleichartiges neben einander ist. Nach atomistischer Vorstellungsart wäre also gar keine Mischung möglich, sondern es gäbe nur Gemenge, denn in einer wahren Mischung darf es keinen Punkt geben, in welchem Materie von anderer Beschaffenheit angetroffen würde als in anderen Punkten. Wenn die ungleichartigen Bestandtheile einer Mischung nicht räumlich nebeneinander und doch miteinander verbunden sind, so müssen sie offenbar in einander sein. Der Begriff der chemischen Mischung beruht also auf dem Begriff der gegenseitigen Durchdringung beider Bestandtheile.

Aber die weitere Frage ist die, ob dieser Begriff auch physische Realität hat. Ein Begriff kann nämlich logisch ganz richtig sein und dennoch hat er keinen Gegenstand. So ist z. B. der Begriff eines Heptaeders oder regulären Siebenflächners logisch nicht unmöglich, d. h. er enthält keinen Widerspruch in sich, aber es giebt keinen derartigen geometrischen Körper, während der Begriff eines Hexaeders oder Würfels geometrische Realität hat. So muss auch die empirische Realität des Begriffs der Durchdringung erst nachgewiesen werden. Diese Nachweisung lässt sich aber ohne Schwierigkeit aus bekannten Thatsachen nach den Gesetzen der Optik und der Schwere geben.

Eine Flüssigkeit, die aus verschiedenartigen Bestandthei-

len gemengt ist, wird trübe und undurchsichtig sein. Vollkommene Durchsichtigkeit dagegen ist bei einer Mischung möglich. Vollkommen durchsichtig ist nämlich eine Flüssigkeit alsdann, wenn der durchgehende Lichtstrahl in keinem Punkte im Innern der Flüssigkeit eine Brechung erleidet, also auf seinem Wege nichts ungleichartiges trifft. Findet er aber in keinem Punkte etwas ungleichartiges, so liegen die ungleichartigen Bestandtheile nicht mehr neben einander, sondern in einander d. h. sie haben sich durchdrungen.

Ein Salz, das schwerer ist als sein Auflösungsmittel, würde sich in diesem nicht schwebend erhalten können, sondern die Salztheilchen würden zu Boden sinken, wenn sie bloss räumlich neben und zwischen den Theilchen des Auflösungsmittels lagerten. Dies ist aber gegen alle Erfahrung. Also kann eine solche Salzauflösung auch kein Gemeng sein, sondern sie muss eine Mischung sein.

Es giebt Verbindungen von Gasen, bei welchen Ein Volumen des einen mit Einem Volumen des andern zusammen wiederum nur Ein Volumen giebt. Z. B. 1 Vol. Quecksilbergas mit 1 Vol. Chlorgas giebt zusammen 1 Vol. Quecksilberchloridgas. Gesetzt ein solches Volumen bestände aus tausend Atomen, so würden nach atomistischer Vorstellungsweise die tausend Atome des einen Gases in die Zwischenräume der tausend Atome des anderen Gases treten. Aber was von tausend gilt, das gilt auch von hundert und von zehn und von einem Atom. Gesetzt daher ein solches Volumen bestände nur aus einem Atom, so würde demohnerachtet 1 Vol. Quecksilber mit 1 Vol. Chlor nur 1 Vol. Quecksilberchloridgas bilden. Die beiden Atome des Quecksilbers und des Chlors nehmen also ein und denselben Raum ein d. h. haben sich durchdrungen. *)

*) Man muss, um diesen Schluss concludent zu machen, solche Stoffe aussuchen, bei deren Zusammensetzung Maass und Gewicht, Volumen und Atom in demselben Verhältniss stehen, bei denen also das Volumen ein genaues Vielfaches von der Anzahl der Atome ist.

Verbindungen der Art sind folgende:

Daraus erhellt, dass die **Undurchdringlichkeit** keine allgemeine, in der Natur der Materie überhaupt gegründete Eigenschaft der Körper ist, sondern dass sie nur da sich findet, wo Kräfte wirksam sind, welche die Entstehung einer Mischung hindern. Wo hingegen mischende Kräfte wirksam sind, da entsteht eine chemische Verbindung. Mischende Kräfte sind aber Anziehungskräfte in der Berührung, folglich ist jede chemische Verbindung die Wirkung von anziehenden Kräften in der Berührung.

Unter den chemischen Verbindungen giebt es aber einen bemerkenswerthen Unterschied. Einige sind nämlich von der Art, dass dabei eine völlige Umwandelung der Natur der Bestandtheile stattfindet und von ihren Eigenschaften in der Verbindung nichts übrig bleibt, als ihr absolutes Gewicht. Bei der andern Art dagegen ist dies nicht der Fall. Es giebt Fälle, wo zwei homogene Mischungen aus denselben Bestandtheilen in denselben quantitativen Verhältnissen gemischt bestehen und dennoch die eine Verbindung der erstern, die andere der zweiten Klasse angehört. Eins der bekanntesten Beispiele der Art ist Wasser nud Knallgas. Entzündet man Knallgas in einem völlig gesperrten Gefäss durch den elektrischen Funken, so verwandelt sich augenblicklich das Knallgas in Wasserdunst. Hierbei kommt kein wägbarer und wahrnehmbarer Stoff weder in das Gefäss noch aus demselben. Allein der elektrische Funke, die Lichterscheinung bei der Verbrennung und die

Atom		Volumen	Stoff		Verbindung Atom		Volumen
1	...	1	Quecksilber				
	+			=	1	...	1.
1	...	1	Chlor				
1	...	1	Quecksilber				
	+			=	1	....	1.
1	....	1	Brom				
1	....	1	Quecksilber				
	+			=	1	...	1.
1	....	1	Jod				
1	....	1	Arsenik				
	+			=	1	...	1.
3	....	3	Sauerstoff				

S. Leopold Gmelin, Handbuch der unorganischen Chemie 5. Aufl. S. 62, 63, 64.

entstehende Hitze lassen keinen Zweifel übrig, dass die Ursachen des Lichts und der Wärme eine Rolle dabei spielen und dass gewisse imponderabele Stoffe, welche die Träger jener Erscheinungen sind, in ein anderes Verhältniss zu den wägbaren Stoffen treten.

Wenn sich Eis in Wasser und dieses in Wasserdunst verwandelt, so wird in der chemischen Verbindung dieses Stoffes nichts geändert, nur die Form der Aggregation verwandelt sich. Aber die Untersuchungen von Black über die latente Wärme haben bewiesen, dass alsdann Wärme für das Gefühl sowie für das Thermometer verschwindet oder latent wird d. i. gleichsam mit in die Verbindung eingeht.

Der charakterisirte Unterschied der beiden Arten der chemischen Verbindungen hat also darin seinen Grund, dass die wägbaren und wahrnehmbaren Stoffe in ein anderes Verhältniss zu den Imponderabilien, den sogenannten Feuerstoffen, treten, und nicht darin, dass die eine Mischung heterogen oder mechanisch, die andere aber homogen oder chemisch ist.

Bei derjenigen Klasse von Mischungen nun, bei welchen anscheinend eine völlige Verwandelung der Elemente und die Bildung eines neuen Stoffes stattfindet, hat die Induction aus den Versuchen zu dem merkwürdigen Gesetz der proportionirten Verbindungen geführt. Nach diesem Gesetz hat jeder Stoff gegen jeden andern Stoff sein bestimmtes constantes Mischungsgewicht, welches durch die stöchiometrische Zahl gemessen wird. Man könnte nun meinen, dass dieses Mischungsgewicht (das sogenannte Atomgewicht) unmittelbar von der specifischen Anziehungskraft des Stoffes abhinge und vielleicht gar das Maass derselben sei. Allein nach dem Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung kommt jedem Stoff seine Kraft nur in seiner Wechselwirkung mit einem anderen Stoffe zu d. h. von zwei Stoffen, die in Wechselwirkung mit einander stehen, hat jeder denselben Grad der wirkenden Kraft. Die specifischen Anziehungskräfte sind also für ein und denselben Stoff ganz andere, je nachdem er mit diesem oder jenem Stoff in Wechselwirkung tritt. Das Mischungsgewicht dagegen ist für jeden Stoff ein ganz bestimmtes und

constantes, unabhängig von jeder Wechselwirkung mit anderen Kräften. Das Mischungsgewicht kann also nicht unmittelbar von der chemischen Anziehungskraft, sondern es muss von etwas anderem abhängen.

Das Mischungsgewicht bestimmt das Neutralisationsvermögen, mit welchem jeder Stoff in den Salzbildungsprocess eintritt. Jeder Stoff hat ein constantes Neutralisationsvermögen im Salzbildungsprocesse. Dieses constante Neutralisationsvermögen jedes Stoffes muss also von einem allgemeinen Verhältniss abhängen, welches für alle Salzbildungsprocesse ein und dasselbe ist. Welches ist wohl dieses?

Jedes Salz besteht aus einer Säure und einer Basis. Um diese zu bilden ist immer eine Verbrennung erforderlich. Die Grundbestandtheile der Salze müssen also durch die Imponderabilien gleichsam erst aufgeschlossen werden, ehe sie in den Salzbildungsprocess eintreten können, und diese Aufschliessung besteht in veränderten Verhältnissen der Stoffe zu gebundenem Licht, gebundener Wärme und Elektricität.

Wir haben an der Voltaischen Säule ein Mittel, um alle Salzverbindungen wieder zu zersetzen. Bei dieser Zersetzung treten der Sauerstoff und die Säuren am positiven Pol, die Basen am negativen Pol der galvanischen Kette auf. Die Oxyde stellen sich also als negativ elektrisch, die Basen als positiv elektrisch dar. Ordnen wir nun die chemischen Stoffe demgemäss wie sie an der Voltaischen Säule aus ihren Verbindungen ausgeschieden werden, so werden wir dieselbe Reihenfolge erhalten, nach der sie in der Salzbildung ihre Rolle spielen.

Dies beides zusammengenommen berechtigt uns zu folgendem Schluss: Es ist das Verhältniss zu den beiden Elektricitäten, welches das Neutralisationsvermögen der Stoffe bestimmt. Die Neutralität erfolgt durch gewisse Bindungen der entgegengesetzten Elektricitäten und deren Ausgleichungen in den Mischungen. Wir erhalten daher hier für eine künftige Ausbildung der chemischen Theorie zwei naturphilosophische Entscheidungen: 1. die unmittelbar mischenden und ausscheidenden Kräfte der chemischen Verwandtschaft müssen

von den Bedingungen unterschieden werden, welche das Mischungsgewicht der Bestandtheile, also die Neutralität der Verbindungen und die dabei stattfindende Proportion der Bestandtheile bestimmen. Die Nichtbeachtung dieses Unterschieds ist der Grundfehler in Berthollets chemischer Statik; 2. die letzt bezeichneten Bedingungen müssen ihre einst zu findende Erklärung von dem Verhältniss des elektro-magnetischen Processes zum chemischen erwarten.

5. Morphotische Processe, Mechanismus der Erstarrung und der Structur fester Körper. Durch den Mechanismus dieses Naturprocesses entstehen die Körper oder die körperlichen Gebilde. Daher heissen die hier waltenden Naturtriebe auch Bildungstriebe. Nach dem Unterschiede der drei Naturreiche müssen wir einen mineralischen, einen vegetativen und einen animalischen Bildungstrieb unterscheiden.

Dem mineralischen Bildungstriebe gehören die Gesetze der freien Krystallisation. Diese Gesetze stehen mit den Gesetzen des Salzbildungsprocesses im innigsten Zusammenhang. Jede Mischung bestimmter chemischer Bestandtheile hat nämlich eine eigenthümliche constante Kerngestalt ihrer Krystalle und ein festes Gesetz des Durchgangs der Blätter. Die Bildung der Kerngestalten erfolgt mit einer strengen mathematischen Regelmässigkeit nach den gradlinigen Constructionen der Stereometrie.

Es ist sowohl nach unserer hier gegebenen naturphilosophischen Uebersicht wie nach den Beobachtungen wahrscheinlich, dass der Krystallisationstrieb kein einfacher Naturtrieb, sondern eine Combination von mehreren derselben nach einem uns bisher noch unbekannten Gesetze sei. Dieses Gesetz ist noch das grösste Räthsel der Physik. Die Atomistik umgeht dieses Problem, indem sie starre und bestimmt gestaltete Grundkörperchen schon als ursprünglich gegeben voraussetzt und aus diesen nur die grössern Körper zusammensetzt. Dies ist aber offenbar das Problem nur umgangen, nicht gelöst. Denn die Aufgabe ist hier gerade, die Möglichkeit der Starrheit selbst zu construiren.

Bei der Erstarrung wird die freie Beweglichkeit aller Theile d. h. die Verschiebbarkeit, welche sie zuvor im tropfbar flüssigen Zustande hatten, aufgehoben, es treten Spannungen nach bestimmten Richtungen hervor und setzen sich mit einander ins Gleichgewicht. Was ist die Ursache dieser Spannungen? Warum bindet sie sich in ihren Wirkungen so fest an die Gesetze der gradlinigen Stereometrie? Dies sind die Fragen, deren Beantwortung gesucht werden müsste. Wie Newton einst aus der Figur der Planetenbahnen das Gesetz der Gravitation entdeckte, so müsste ein zweiter Newton aus den stereometrischen Gestalten der Krystalle das Gesetz der spannenden Kräfte entziffern. Hier kann also nur die mathematische Theorie weiter führen.

Die Gebilde, welche der krystallisirende Bildungstrieb hervor bringt, nennt man anorganische und unterscheidet sie von den Bildungen des vegetativen und animalischen Triebes, welche letzteren man organische Gebilde nennt. Die Erfahrung zeigt zwischen beiden sehr hervorstechende Unterschiede.

Die organischen Bildungen entwickeln sich aus Keimen, die anorganischen entstehen unmittelbar aus der rohen Materie selbst. Die anorganischen wachsen durch Assimilation d. i. durch äussere Anhäufung der Theile, die organischen durch Intussusception d. i. durch Einsaugen flüssiger Stoffe und Gestaltung von Innen heraus. Die anorganischen sind todt, die organischen lebendig. Bei den erstern sehen wir eine Reihe von Ursachen und Wirkungen, bei letztern einen Kreislauf derselben, so dass jedes Glied Ursache und Wirkung zugleich ist. Ein anorganisches Gebild befindet sich in dem Zustande eines stabilen Gleichgewichts, ein organisches dagegen in dem Zustande eines beweglichen Gleichgewichts. Es kommt in dem Mechanismus eines organischen Gestaltungsprocesses zu dem bloss morphotischen Princip noch ein Princip der innern Selbsterhaltung hinzu, wodurch alle organischen Gebilde und Bewegungen an eine bestimmte Form des Kreislaufes und deren Einheit gebunden bleiben. Diese Vereinigung eines Selbsterhaltungsprocesses mit einem der

Krystallisation analogen Gestaltungsprocess besteht hier nicht zufällig, sondern durch ein Gesetz der Vereinigung beider zu einem geschlossenen Ganzen. Nun liegt aber hier das eigentliche physiologische Räthsel nicht in dem Selbsterhaltungsprocess, sondern in dem Bildungsprocess. Denn Processe der erstern Art können wir erklären wie z. B. das Spiel der sich zersetzenden und wiederausgleichenden elektrischen Strömungen an der galvanischen Säule, die Pendelbewegung oder die Ausgleichung aller Störungen im Planetensystem. Aber die Entstehung der Gestaltung ist uns noch ganz unverständlich.

Mikroskopische Untersuchungen haben bereits die elementare Zusammensetzung der Pflanzen und Thiere aus Zellen und die Verwandtschaft der Zellenbildung mit der Krystallbildung erkennen lassen. Die Zelle unterscheidet sich durch zweierlei von dem Krystall, einmal dadurch, dass sie die Mutterlauge einschliesst und dann dadurch, dass sie für gewisse flüssige Stoffe permeabel d. h. durchdringlich bleibt. In Folge des erstern hat die Zelle einen bestimmten flüssigen Inhalt, während beim Krystall das erstarrte Gebild die Mutterlauge vollständig ausschliesst. In Folge des zweiten bleibt dieser Inhalt mit der Aussenwelt in beständiger Wechselwirkung. Diese Wechselwirkung zwischen dem Inhalt der Zelle und dem Aeussern erzeugt einen fortwährenden Stoffwechsel, wodurch die Zelle selbst allmählich verändert wird. Die Zelle ist also im Grunde nichts anderes, als die Krystallform der organischen Materie. „Das Primäre, Ursprüngliche in aller Organisation, sagt Schleiden, ist stets das Auskrystallisiren der organischen Materie, also Zellenbildung. Die Zelle ist der erste Anfang jedes Organisationsprocesses. Aber dieser Process bleibt nicht bei der Zellenbildung stehen.“

Aus den hier gegebenen Erörterungen wird erhellen, dass die Lebenskraft des organischen Körpers kein physiologischer Erklärungsgrund, sondern ein physiologisches Problem ist. Denn das, was man Lebenskraft nennt, ist keine besondere Grundkraft der organischen Materie, sondern eine bestimmte Form der Wechselwirkung, die erst aus den Grundkräften der Materie erklärt werden müsste. Diese Form

der Wechselwirkung hat das Besondere, dass sie nicht in vorübergehenden einzelnen Einwirkungen und Gegenwirkungen besteht, sondern ein geschlossenes Ganzes bildet, dessen Theile andauernd in wechselseitigen Einwirkungen und Gegenwirkungen verknüpft sind, so dass jeder Theil im Ganzen Ursach und Wirkung zugleich ist. Diese wechselseitige Abhängigkeit der Theile von einander ist durch die Form des Ganzen bedingt. So entsteht der Mechanismus eines Naturprocesses, dessen Spiel von Veränderungen an Perioden der Wiederkehr (Reproduction) gebunden ist, weil der Zustand des Systems der in Wechselwirkung befindlichen Stoffe um eine entweder feststehende oder stetig fortrückende Linie des mittleren Gleichgewichtes beständig oscillirt. Ein jedes Ganzes dieser Art heisst Organismus und die Form desselben die Seele des Ganzen. Hier ist die Grenze, wo die Physiologie und die Psychologie sich berühren und wo dennoch Körperliches und Geistiges durch eine unausfüllbare Kluft getrennt ist. Der Physiolog kann von der Theilbarkeit seiner Seele sprechen, denn Theile eines Ganzen können in der Aeusserung ihrer Thätigkeit gehemmt sein. Er hat vollkommen Recht, wenn er diese Seele wie etwas Körperliches betrachtet, denn sie ist nichts anderes als die Form einer körperlichen Wechselwirkung zwischen irdischen Stoffen. Aber er befindet sich in einem grossen Irrthum, wenn er die körperliche Seele des menschlichen Organismus für den erkennenden, lustfühlenden und willkührlich handelnden Geist des Menschen hält. Der Begriff der Seele eines organisirten Körpers oder der Lebenskraft (*Anima, ψυχή*) ist ein Collectivbegriff für den Complex der organischen Thätigkeiten in ihrer Einheit und ihrem Zusammenwirken, es ist ein Begriff, der inductorisch aus äusserer Erfahrung gezogen ist. Der Begriff des Ichs oder des Geistes (*Animus, νοῦς*) dagegen ist der Urbegriff der innern Erfahrung, es ist ein Begriff, der von allen Begriffen vom körperlichen Organismus völlig unabhängig ist. Jener ist der Begriff von dem Grunde der Einheit eines organischen Ganzen. Dieser ist der Begriff von dem Subject, das alle meine innern Wahrnehmungen begleitet. *Anima* ist der Begriff von einem Gesetz und zwar

von einem bis jetzt noch unbekannten, aber bestimmten Gesetz der Wechselwirkung, welches das Triebwerk des Organismus ebenso beherrscht und regelt, wie das Gesetz der Gravitation die Bewegungen der Himmelskörper. *Animus* dagegen ist der Begriff von einem Gegenstande, den wir in innerer Erfahrung kennen lernen und der von allen Gegenständen der äussern Erfahrung gänzlich und in jeder Beziehung verschieden ist. Es ist daher eine trügerische Hoffnung, dass die Fortschritte der Nervenphysik Erklärungsgründe geben würden für das Erkennen, Lustfühlen und willkührliche Handeln. Die körperlichen Spiele der Nerventhätigkeiten gehören der Aussenwelt an, die geistigen Thätigkeiten meines Ichs im Erkennen, Lustfühlen und Handeln dagegen sind Vorgänge in der Welt meines Innern und zwischen beiden Welten liegt eine Kluft, über welche eine Brücke zu schlagen der menschlichen Wissenschaft stets unmöglich bleiben wird.

12. Die Geschichte der Induction.

Aristoteles berichtet uns, dass Sokrates der Urheber der Inductionen sei. „Zwei Dinge, sagt er, kann billigerweise Niemand dem Sokrates streitig machen, die Induction und die Bestimmung allgemeiner Begriffe.“ Sokrates suchte Definitionen ethischer Begriffe. Diese stellte er nicht willkührlich auf, sondern entwickelte sie an Beispielen. Erst Platon fing an, die allgemeinen Begriffe abgesondert für sich in *abstracto* zu behandeln. Die ἐπαγωγή des Sokrates ist allerdings der Fortgang vom Einzelnen und Besondern zum Allgemeinen, aber sie ist nicht sowohl das, was wir jetzt unter Induction verstehen, als vielmehr die Kunst der Abstraction; sie führt nicht zu Lehrsätzen, sondern nur zu Begriffen, sie entwickelt diese Begriffe aus der Anschauung der Dinge und Lebensverhältnisse. Auch dürfen wir nicht übersehen, dass der sokratische Gebrauch der ἐπαγωγή auf das Gebiet ethischer Begriffe

beschränkt blieb. Die Natur hielt Sokrates für ein verschlossenes Buch. Die Götter, meinte er, hätten nicht gewollt, dass Menschen dieses Göttliche erkennen sollen.

Platon, in dessen tiefem und umfassendem Geiste sich zuerst alle philosophischen Bestrebungen der griechischen Vorzeit wie in einem Brennpunkte sammelten, vereinigte die Physik des Heraklit, sowie die Mathematik und Astronomie der Pythagoreer mit der Metaphysik des Parmenides und der Ethik des Sokrates zu einem grossartigen philosophischen System. Wesenlosigkeit und Nichtigkeit der Sinnenwelt einerseits und Wesenheit der Welt der Ideen andererseits ist der Grundgedanke dieses Systems. Um diesen Gedanken dialektisch zu begründen, unterscheidet er die drei Erkenntnissweisen der Sinnesanschauung (πίστις), der mathematischen Anschauung (διάνοια) und der nur denkbaren philosophischen Erkenntniss (νόησις) und stellt sie gleich drei verschiedenartigen Weltansichten stufenweis übereinander. Den nicht sichtbaren, sondern nur denkbaren d. i. nur durch Begriffe erkennbaren Gegenstand der philosophischen oder noetischen Erkenntniss nennt er Idee (ἰδέα) und behauptet, dass es von diesem allein eine Wissenschaft gebe. Von dem Sichtbaren dagegen besitze der Mensch nur eine wandelbare Meinung, denn es sei selbst wandelbar und, wie Heraklit sagt, im ewigen Fluss begriffen. Diese Beschränkung der Wissenschaft (ἐπιστήμη) auf das Gebiet der noetischen Erkenntniss und die Ansicht von der Unmöglichkeit einer empirischen Wissenschaft vernichtet dem Platon alle Erfahrungswissenschaften und macht seine Naturphilosophie zu dem geraden Widerspiel der mathematischen Naturphilosophie Newtons. Seine Unterordnung der Physik unter die Ethik, seine ethikotheologische Kosmologie im Timäos zeigt den von parmenideischem Geist durchdrungenen Schüler des Sokrates. Die Körperwelt besteht nach Platon ohne Materie (ὕλη). Die platonische Gottheit bedient sich bei der Weltschöpfung keines Baumaterials. Der Körper ist keine geformte palpable Masse, sondern ein wesenloses Schattenbild des ewig Wahren der Idee. Selbst die Elemente, aus denen alles Sichtbare gebildet ist und die sich in einander ver-

wandeln, haben kein materielles Substrat, sondern in den fünf regulären Körpern nur eine mathematische Basis ihrer Existenz. Dies ist durch Böckh, den grossen Kenner des klassischen Alterthums und der platonischen Philosophie, in seiner Abhandlung über die Bildung der Weltseele im Timäos bis zur Evidenz erwiesen und dadurch der Schlüssel zum wahren Verständniss der platonischen Naturphilosophie wieder aufgefunden. Wie in dem Gebiet des Sichtbaren das wesenlose Bild im Spiegel zu dem sich abspiegelnden wirklichen Gegenstande, so verhält sich im Gebiet des Denkbaren das Mathematische zum Philosophischen, die Zahl und geometrische Figur zur Idee. Aecht pythagoreisch und im Einklang mit seiner Grundansicht, dass das Sichtbare nicht das Sein an sich (ὄντως ὄν), sondern nur die Erscheinung (φαινόμενον) des Denkbaren, ist seine Ansicht von der Herrschaft der Mathematik über die Sinnenwelt. Gott übt nach Platon beständig Geometrie aus. Die Weltseele, das Princip des Lebens der sichtbaren Welt, ist, wie wir aus dem Timäos ersehen, nicht bloss nach einer Zahl gebildet, sondern selbst eine Zahl, besteht also nach pythagoreischer Ansicht nicht bloss ihrer Form, sondern auch ihrem Wesen nach aus Zahlen. Daher die Harmonie der Welt. Die Zahlenharmonie, welche das Gesetz der Bildung der Weltseele enthält, ist dem Platon die Brücke aus der Mathematik in die Astronomie. Die mythisch verschleierten Bilder des Himmelsbaus, die Platon mit einer eigenthümlichen Beweglichkeit der Phantasie immer nur skizzenartig ausmalt, anders im Timäos, anders am Ende der Republik, wieder anders am Ende des Phädrus, stehen da wie wandelbare Traumgestalten im Duft der Phantasie, nicht wie wirkliche Gegenstände in „der gemeinen Deutlichkeit der Dinge.“ Das wird uns nicht Wunder nehmen, wenn wir bedenken, dass ihm alles Sichtbare dem Schatten gleich nur ein veränderliches und wandelbares Bild des Denkbaren ist. Seine Ansicht von der Drehung der Himmelskugel und dem Laufe der Sonne hat noch neuerdings Böckh in seiner Schrift über das kosmische System des Platon meisterhaft auseinandergesetzt. Dunkler ist seine Lehre von der Planetenbewegung. Es ist kaum zu bezweifeln, dass

Platon, der Lehrer und Freund des Eudoxus, die Stationen und Rückgänge der Planeten im Thierkreis gekannt habe. Aber er scheint den bloss optischen Gegensatz zwischen scheinbarer und wahrer Bewegung für einen transcendentalen gehalten und die Scheinbarkeit der himmlischen Bewegungen der Bildlichkeit (εἰκασία) der Vorstellungsweise gleichgesetzt zu haben. Seine Aufgabe an die Astronomie: Construction der scheinbaren Bewegung der Planeten durch Combination gleichförmiger Kreisbewegungen, suchte sein unmittelbarer Schüler Eudoxus zu lösen. Diese Theorie der Himmelsbewegungen, die älteste die wir kennen, wurde von Kalippos weiter und feiner ausgebildet und von Aristoteles angenommen. Es ist, wie ich anderwärts gezeigt habe,*) ein wesentlicher Unterschied zwischen der homocentrischen Sphärentheorie und der Epicykelntheorie des Appollonios und Hipparchos und es ist zu bedauern, dass Whewell diesen Unterschied gänzlich übersehen hat.

Ein Blick auf das Ganze des platonischen Systems lässt uns erkennen, dass Platon die verschiedenartigen Theile der menschlichen Erkenntniss sehr wohl kannte und sorgfältig von einander sonderte. Aber die drei Erkenntnissarten, die empirische, mathematische und philosophische, bleiben nur locker und schwankend nebeneinander stehen und es fehlt dem Ganzen die feste logische Form der Gedankenverbindung, welche gerade unsere exacten Wissenschaften charakterisirt. Das war es, was schon Aristoteles vermisste und suchte.

Aristoteles stellt über das Wesen und die Form der ἐπιςήμη Untersuchungen an und wird dadurch der Erfinder der Logik. Wissenschaft (ἐπιςήμη) ist nach ihm Erkenntniss aus Gründen; ihre logische Form die ἀπόδειξις, Beweisführung d. i. Ableitung der Sätze aus ihren Grundwahrheiten. Die ἀρχαὶ τοῦ ἐπιστητοῦ, die Anfänge des Gewussten oder die Principien, gehören dem νοῦς, dem Vermögen der Principien, ein Begriff, der ohngefähr dem Kanti-

*) In den Abhandlungen der Friesischen Schule Heft 2: Ueber die Sphärentheorie des Eudoxus und Aristoteles.

schen Begriff der reinen Vernunft entspricht. Wir gelangen zu den Principien durch *ἐπαγωγή*, **Induction**. Wir entwickeln aus den Principien durch den Syllogismus. Welches sind nun die aus dem *νοῦς* entspringenden Principien des apodiktischen Wissens oder der Wissenschaft? Aristoteles giebt als solche den Satz des Widerspruchs und den Satz des ausgeschlossenen Dritten, also die Grundsätze der Logik an. Die Form des apodiktischen Erkennens oder der syllogistischen Gedankenverbindung beschreibt er auf folgende Weise:

Τρία γάρ ἐςι τὰ ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν, ἓν μὲν τὸ ἀποδεικνύμενον, τὸ συμπέρασμα (der Schlusssatz), *ἓν δὲ τὰ ἀξιώματα· ἀξιώματα ἐξ ὧν* (sc. *ἀποδείκνυται*). *τρίτον τὸ γένος τὸ ὑποκείμενον**) und anderwärts: *τῇ φύσει τρία ταῦτά ἐςι, περὶ ὅ τε δείκνυσι* (Untersatz) *καὶ ἃ δείκνυσι* (Schlusssatz) *καὶ ἐξ ὧν*. (Obersatz).**) Jeder Beweis setzt also zweierlei voraus, einen allgemeinen Grundsatz, **aus** dem, und einen bestimmten Gegenstand, **von** dem etwas bewiesen wird. Dieser Gegenstand, um den sich die Beweisführung dreht, ist der **Unterbegriff** im Schluss. Die Axiome nun, lehrt Aristoteles seltsamer Weise weiter, sind für alle Wissenschaften dieselben, der Gegenstand ist jeder eigenthümlich: *αἱ γὰρ ἀρχαὶ διτται, ἐξ ὧν τε καὶ περὶ ὅ· αἱ μὲν οὖν ἐξ ὧν κοιναί, αἱ δὲ περὶ ὃ ἴδιαι, οιον ἀριθμός, μέγεθος.* Aristoteles verwechselt hier die Regeln, **nach** denen geschlossen wird, mit den Regeln, **aus** denen geschlossen wird. Hier steckt der Fehler des logischen Dogmatismus, der Fehler der Verwechselung analytischer Urtheile mit den nothwendigen synthetischen Vernunftwahrheiten. Die Regeln, nach denen geschlossen wird, sind die logischen Gesetze des Denkens und Schliessens und diese sind allerdings für alle Schlüsse dieselben, dagegen die Regeln, aus denen geschlossen wird, sind die Obersätze der Schlüsse und diese sind für jeden Schluss andere.

Die *ἐπαγωγή* gebraucht Aristoteles in einem doppelten Gegensatze, das eine mal gegen *συλλογισμός*, das andere mal

*) Analyt. post. I, 7.
**) C. 10. 76, b, 21.

gegen ἐπιστήμη. Im ersteren Falle ist ἐπαγωγή der Schluss vom Besondern aufs Allgemeine, von den Theilen auf das Ganze, von den Fällen auf die Regel. Im andern Falle ist der Unterschied folgender. Die ἐπιστήμη erkennt durch Vernunftschlüsse aus dem Allgemeinen (συλλογισμῷ ἐκ τῶν καθόλου), die ἐπαγωγή giebt auch den Anfang des Allgemeinen (ἀρχή ἐστι καὶ τοῦ καθόλου). Die ἐπαγωγή führt zum Princip, die ἐπιστήμη entwickelt aus dem Princip. Jene ist der Fortgang von dem für uns Bekannten und Gewissen zu dem an sich Bekannten und Gewissen, diese ist der umgekehrte Weg von diesem zu jenem. Aristoteles vereinigt hier, wie schon der zwiefache Gebrauch des Wortes anzeigt, zwei verschiedene Dinge in einem Ausdruck. Die Induction (ἐπαγωγή im Gegensatze gegen συλλογισμός) führt nie zum Princip, sondern setzt es schon voraus, sie führt vielmehr zu einem Gesetz, welches einen bestimmten Kreis von Erscheinungen an ein Princip knüpft. Der regressive epagogische Gedankengang, welcher zum Princip führt (die ἐπαγωγή im Gegensatz gegen ἐπιστήμη) ist keine Schlussverbindung, sondern Abstraction. Diese Verwechselung der Induction mit Abstraction ist in der Geschichte der Philosophie stehen geblieben bis auf die neuere Zeit. Hier liegt zugleich der innere verdeckte Widerspruch des aristotelischen Systems. Ist nämlich der νοῦς die Quelle der Grundwahrheiten (der Principien), so haben sie einen von der Sinnesanschauung unabhängigen reinvernünftigen Ursprung. Ist dagegen die ἐπαγωγή die Quelle derselben und diese nichts anderes als der disjunctive Schluss, so entspringen sie aus der Sinnesanschauung. Alle unsere Erkenntnisse würden alsdann von sinnlichem Ursprung sein. Aristoteles wurde diesen Widerspruch nicht gewahr, weil er sein Philosophem nicht systematisch aus seinen Principien entwickelte, sondern wie die Alten überhaupt einen erfinderischen, Principien aufsuchenden Gedankengang ging.

Die Form der Induction (ἐπαγωγή) besteht nach Aristoteles darin, dass von den Gliedern des Schlusses das obere durch das untere mit dem mittleren d. h. das Allgemeine mit dem Besondern durch das Einzelne verknüpft wird, was nur

dann angeht, wenn das mittlere und das untere Glied Wechselbegriffe sind d. h. wenn jenes den Artbegriff darstellt, dieses die Gesammtheit der unter dem Artbegriff enthaltenen Einzelnen. Zu einer vollständigen Induction ist daher eine vollständige Kenntniss alles Einzelnen nöthig.

Er giebt hierzu folgendes Beispiel:

Menschen, Pferde und Maulesel sind langlebig
Eben diese haben keine Galle

Die Thiere ohne Galle sind langlebig,

oder nach unserer Form der Darstellung mit der disjunctiven Regel an der Stelle des Obersatzes:

Thiere ohne Galle sind Menschen, Pferde und Maulesel
Menschen, Pferde und Maulesel sind langlebig

Alle Thiere ohne Galle sind langlebig.

Dieser Schluss schliesst offenbar nur dann, wenn der Obersatz (oder nach der aristotelischen Stellung der Sätze: der Untersatz) einfach convertirt, also statt: jedes *S* ist *M*, auch gesagt werden kann: jedes *M* ist *S*. Die Möglichkeit dieser Umkehrung beruht hier nicht, wie Aristoteles sagt, darauf, dass *S* und *M* Wechselbegriffe sind, sondern vielmehr darauf, dass *S* den Artbegriff (*τὸ εἶδος*) darstellt, *M* die Gesammtheit der unter dem Artbegriff enthaltenen Einzelnen (*ἄτομα*) d. i. sie beruht auf der Natur des disjunctiven Urtheils. Ein vollständiges disjunctives Urtheil lässt sich auch umkehren. Der Mangel der Aristotelischen Theorie liegt also hier nicht eigentlich in seiner Lehre von den Schlüssen, sondern weiter rückwärts in seiner Lehre von den Urtheilen: in der Unkunde der divisiven Urtheilsform im Unterschied von der kategorischen. Der Ausdruck Wechselbegriff ist nämlich nur beim kategorischen Urtheil an seinem Platz. Indem Aristoteles diesen Ausdruck hier braucht, setzt er das disjunctive Urtheil dem kategorischen gleich, ohne zu bemerken, dass es eine ganz andere Art von Urtheilen ist.

Es ist ferner nicht richtig, dass Aristoteles den Artbegriff (das Besondere) als Mittelbegriff (*Terminus medius*) und das Einzelne als Unterbegriff (*Terminus minor*) bezeichnet. Viel-

mehr ist hier gerade umgekehrt das Einzelne der Mittelbegriff und der Artbegriff der Unterbegriff des Schlusses. Denn der Mittelbegriff, durch den die allgemeine Bestimmung von dem einen Subject auf das andere übertragen wird, verbindet beide Prämissen und verschwindet im Schlusssatze. Der Unterbegriff dagegen, *τὸ ὑποκείμενον, περὶ ὃ ἀποδείκνυται*, ist das Subject des Untersatzes. So ist z. B. in der Keppler'schen Induction die Marsbahn (der Inbegriff aller Marsörter) der Gegenstand der Beweisführung und mithin der Unterbegriff. Dagegen sind die einzelnen von Tycho beobachteten Oerter des Mars der Mittelbegriff, durch den die Figur der Marsbahn bestimmt wird.*)

Endlich hat Aristoteles, was für die inductorische Naturforschung der entscheidende Punkt ist, vorausgesetzt, dass bei der Induction wie beim Syllogismus der Oberbegriff schon gegeben sei, und er hat nicht bemerkt, dass er in den meisten Fällen empirisch (durch Experiment oder Beobachtung) und mathematisch (durch Construction oder Rechnung) aufgesucht werden muss.

Die Induction, die seit Keppler und durch ihn der Weg zur Entdeckung der Naturgesetze geworden ist, hat dem

*) Analyt. prior. C. XXV.: *Ἐπαγωγὴ μὲν οὖν ἐςι καὶ ὁ ἐξ ἐπαγωγῆς συλλογισμὸς τὸ διὰ τοῦ ἑτέρου θάτερον ἄκρον τῷ μέσῳ συλλογίσασθαι. Οἷον, εἰ τῶν ΑΓ μέσον τὸ Β, διὰ τοῦ Γ δεῖξαι, τὸ Α τῷ Β ὑπάρχειν· οὕτω γὰρ ποιούμεθα τὰς ἐπαγωγάς. Οἷον, ἔστω τὸ Α, μακρόβιον· τὸ δ', ἐφ' ᾧ Β, τὸ χολὴν μὴ ἔχον· ἐφ' ᾧ δὲ Γ, τὸ καθέκαςον μακρόβιον, οἷον ἄνθρωπος, καὶ ἵππος, καὶ ἡμίονος. Τῷ δὴ Γ ὅλῳ ὑπάρχει τὸ Α, πᾶν γὰρ τὸ ἄχολον μακρόβιον. Ἀλλὰ καὶ τὸ Β, τὸ μὴ ἔχον χολὴν, παντὶ ὑπάρχει τῷ Γ· εἰ οὖν ἀντιςρέφει τὸ Γ τῷ Β, καὶ μὴ ὑπερτείνει τὸ μέσον· ἀνάγκη, τὸ Α τῷ Β ὑπάρχειν. Δέδεικται γὰρ πρότερον, ὅτι, ἐὰν δύο ἄττα τῷ αὐτῷ ὑπάρχῃ, καὶ πρὸς θάτερον αὐτῶν ἀντιστρέφῃ τὸ ἄκρον, ὅτι τῷ ἀντιςρέφοντι καὶ θάτερον ὑπάρξει τῶν κατηγορουμένων. Δεῖ δὲ νοεῖν τὸ Γ τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν καθέκαςον συγκείμενον· ἡ γὰρ ἐπαγωγὴ διὰ πάντων. Ἔςι δὲ ὁ τοιοῦτος συλλογισμὸς τῆς πρώτης καὶ ἀμέσου προτάσεως. Ὧν μὲν γάρ ἐστι μέσον, διὰ τοῦ μέσου ὁ συλλογισμός· ᾧ δὲ μή ἐςι, δι' ἐπαγωγῆς. Καὶ τρόπον τινὰ ἀντίκειται ἡ ἐπαγωγὴ τῷ συλλογισμῷ· ὁ μεν γὰρ διὰ τοῦ μέσου τὸ ἄκρον τῷ τρίτῳ δεικνυσιν· ἡ δὲ διὰ τοῦ τρίτου τὸ ἄκρον τῷ μέσῳ. Φύσει μὲν οὖν πρότερος καὶ γνωριμώτερος ὁ διὰ τοῦ μέσου συλλογισμός· ἡμῖν δὲ ἐναργέστερος ὁ διὰ τῆς ἐπαγωγῆς.*

Aristoteles für die Naturforschung noch gar keine Bedeutung. Seiner Naturphilosophie fehlt der Begriff der physischen Nothwendigkeit (des Naturgesetzes) ebenso wie seiner Ethik der Begriff der moralischen Nothwendigkeit (des Sittengesetzes). Die Grundlage seiner ganzen Naturphilosophie ist seine Lehre von den vier Arten der Gründe. Diese sind:

ὕλη,	εἶδος,	ἀρχὴ τῆς κινήσεως,	οὗ ἕνεκα,
Materia,	*Forma,*	*Efficiens* (*Causa*),	*Finis,*
Worans,	Was, (und Wonach)	Wodurch,	Wozu,
ἐξ οὗ,	τὸ τί, (und τὸ κατά τι)	διὰ τί,	οὗ ἕνεκα,

Das Räthsel der ganzen aristotelischen Philosophie liegt nun eigentlich in der Abstraction *τὸ εἶδος*. Zuerst lehrt Aristoteles logisch ganz richtig, es gebe drei Principien (*ἀρχαί*): *ὑποκείμενον* und die beiden *ἀντικείμενα: εἶδος* und *στέρησις* d. i. Subject und bejahendes und verneinendes Prädicat. Hier ist also *τὸ εἶδος* das Prädicat im bejahenden Urtheil. Metaphysisch dreht sich ihm aber die Sache geradezu um, *τὸ εἶδος* verwandelt sich zum *τὸ τί* d. i. zum Subject, es erhält Wesenheit.

Denn bei der metaphysischen Nachfrage nach dem, was *τὸ ὑποκείμενον* oder *οὐσία* d. i. das Wesen der Dinge sei, entscheidet er dahin, dass die Masse (*ὕλη*) bloss der Möglichkeit nach (*δυνάμει ὄν*) existire, die gestaltete Masse aber der Wirklichkeit nach (*ἐντελεχείᾳ ὄν*), die Gestalt (*εἶδος* oder *μορφή*) daher der Grund der Wirklichkeit sei. Bei dieser Vergleichung der Gründe des Seins mit den Kategorien der Modalität fehlt die Angabe des Grundes der Nothwendigkeit d. i. das Gesetz.

So kommt Aristoteles zu einer eigenthümlichen Hypostasirung der Begriffe, welche von dem neoplatonischen Realismus wohl zu unterscheiden ist. Die Gründe des Seins sind für uns einerseits formale, andererseits materiale. Die formalen liegen in den nothwendigen F o r m e n der Zusammensetzung (Raum und Zeit) und der Verknüpfung (Gesetz), die materialen in dem zufälligen G e h a l t der Erkenntniss, welcher in

jenen Formen zur Einheit eines Ganzen verbunden wird. Jene sind selbstständig, aber für sich leer und wesenlos und erhalten erst ihre Erfüllung durch diesen. In dem aristotelischen Begriff der Entelechie oder substantiellen Form, wie es später die Scholastiker nannten, liegt dagegen die Verwechselung der Selbstständigkeit der Form mit der Substantialität des Gegenstandes, die Verwechselung der bloss logischen Form des Subjects mit der Kategorie des Wesens. Wenn wir sowohl die materialen wie die formalen Gründe des Seins auf Begriffe bringen, so finden wir dass die erstern eine ganz andere Rolle im Urtheil d. i. in der Erkenntniss durch Begriffe spielen, als die letztern. Dies zeigt sich an der Verschiedenheit der Stelle des Begriffs in der gedachten Erkenntniss.

Τὸ εἶδος als solches (nicht die Gegenstände seines Umfangs, sondern der Begriff als allgemeine Vorstellung) kann ebensowohl im Prädikat des kategorischen wie im Subject des divisiven Urtheils vorkommen. Man sagt z. B.: dieser Körper ist warm und: die Wärme dehnt die Körper aus, oder: der Stein ist schwer und: die Schwere macht den Stein fallen. Es kann daher auch zweierlei durch einen Begriff vorgestellt werden, einmal materialiter Dinge, dann aber auch formaliter die Abhängigkeit der Dinge von einem Gesetz, das, was man die Natur einer Sache nennt. Diese Doppelnatur des Begriffs und, was damit zusammenhängt, der Unterschied der kategorischen und divisiven Urtheilsform ist von Aristoteles nicht beobachtet worden. Er hat in dem *εἶδος* nur das Was *(τὸ τί)* aber nicht das Wonach (das Gesetz, die Regel) gesehen. Das Was ist ein Gegenstand der Anschauung, das Wonach ein Gegenstand der Induction. Seine Induction hat also eigentlich keinen Gegenstand.

Die Verwechselung von dem *τί* mit dem *κατά τι* im *εἶδος* ist wohl durch sein *τὸ τί ἦν εἶναι* herbeigeführt worden. Ich deute mir diesen vielbesprochenen aristotelischen Kunstausdruck so: *τί* bezeichnet Gegenstand (Subject), *τὸ εἶναι* Begriff (nicht seiner Form, sondern seinem Inhalte nach), *ἦν* ist Aoristform und bedeutet: das, was erscheint, was sich dem Blick

darzustellen pflegt, was in der Anschauung liegt. Der ganze Ausdruck bezeichnet daher den Fortschritt von der Anschauung zum Begriff, das auf Begriffe Bringen dessen, was man sieht, also die Begriffsbestimmung des Was der Anschauung, mit einem Worte: den Begriff von einem Gegenstande. Aristoteles selbst definirt so: ἔςι τὸ τί ἦν εἶναι ἕκαςον ὃ λέγεται καθ' αὑτό, also τὸ τί ἦν εἶναι ist ein Jedes von dem man sagt, es sei καθ' αὑτό d. i. selbstständig, nicht abhängig von etwas Anderm.

Das grosse Räthsel der Philosophie des Platon sowohl wie des Aristoteles liegt in der Frage nach der Realität des Allgemeinen, in der Frage nach der Art der Existenz des τὸ αὐτὸ τὸ der Begriffe. Platon hatte τὸ αὐτό von dem Einzelnen getrennt, jenes in die unsichtbare, nur denkbare Ideenwelt versetzt, dieses der sichtbaren, aber wesenlosen Sinnenwelt gelassen. Aristoteles nun verbindet es wieder damit und legt es in die Dinge selbst. Er sagt: wenn man die Ideen vom Begriffe trennt, so giebt es von jenen keine Wissenschaft (weil diese nur durch Begriffe möglich ist) und dieser ist nicht (οὐκ ἔςι, weil ja dann ἰδέα und nicht εἶδος τὸ ὄν ist). Auch bemerkt er, dass das Subject alsdann nicht Substanz sein könne, sondern die Ideen würden es sein, aber nicht als Substanz von einem Subject, sondern durch Theilhaben (μετέχειν) des Subjects an den Ideen. Nur aus dieser geschichtlichen Stellung zu seinem Lehrer lässt sich verstehen, wie Aristoteles dazu gekommen ist, der Form Substantialität, dem Begriffe (εἶδος) Wesenheit beizulegen.

Des Aristoteles ganze Naturansicht ist wie die aller Alten mit Ausnahme des Anaxagoras nicht mechanisch, sondern teleologisch. Die Natur wirkt nach ihm nicht nach Gesetzen sondern nach Zwecken. Dies hat zur Folge die Vorstellung von der Geistigkeit der wirkenden Natururşachen. Die Ursachen der Naturveränderungen sind nach Aristoteles keine physikalischen Kräfte, sondern Entelechien d. i. geisterhafte Wesen, deren Wirkungsweise an keine geometrische Nothwendigkeit und keine mathematische Regel gebunden ist. Die Naturphilosophie des Aristoteles führt daher auf keine allgemeinen Erklärungsgründe der Naturerscheinungen, sondern auf die An-

nahme von Einzelwesen als Urheber derselben. Das Dasein derselben ist nicht mit Nothwendigkeit gegeben, sondern bleibt zufällig für uns.

Die platonische und pythagoreische Philosophie scheint dem Geiste und der Denkweise der Helenen mehr zugesagt zu haben, als die aristotelisehe. Pythagoreisch-platonische Bildung schlug ihren Sitz zu Alexandria, der Metropole der griechischen Cultur und dem Emporium des Welthandels, auf. Sie entwickelte sich dort in zwei sehr verschiedenartigen Richtungen in der Schule der Neoplatoniker und in der Schule der grossen Mathematiker und Astronomen des Museums. Hipparch und seine Nachfolger haben sich als Erfinder der astronomischen Beobachtungskunst und der epicyklischen Theorie der Planetenbewegung einen unsterblichen Namen in der Geschichte der Naturwissenschaften erworben. Neben ihnen darf Archimedes von Syrakus nicht mit Stillschweigen übergangen werden, der Vorläufer Galilei's und der erste und vielleicht einzige Grieche, dem die Idee der Experimentalphysik vorschwebte.

Die aristotelische Philosophie fand eine bereitwillige Aufnahme und Pflege bei den Arabern. Arabische Gelehrte des grossen Khalifenreichs brachten die Kenntniss der aristotelischen Physik und Metaphysik mit in die Abendlande, wo man bereits mit den logischen Schriften des Aristoteles bekannt war. Es liegt nicht in dem Zwecke unserer gegenwärtigen Arbeit, die Gründe zu untersuchen, welche die platonische Philosophie der hellenischen, die aristotelische Philosophie dagegen der arabischen und westeuropäischen Welt annehmbar machten, aber wir sind der Meinung, dass diese bemerkenswerthe Thatsache die besondere Aufmerksamkeit derer verdiene, die sich mit diesem Gegenstande der Culturgeschichte beschäftigen.

Etwa zweitausend Jahre nach Platon und Aristoteles begann fast gleichzeitig in Italien und Deutschland eine grosse Revolution in den Wissenschaften. Der Anstoss dazu ging aus von Copernicus. Unter den Männern, die sie bewirkten, stehen oben an Tycho de Brahe, Galilei und Keppler.

Die heliocentrische Lehre des Copernicus eröffnete ein

neues Feld der Untersuchung, brachte neue Aufgaben und neue Gesichtspunkte der Auffassung der himmlischen Erscheinungen sowohl wie der Phänomene der Bewegung. In ihr lag der Keim einerseits zur Gründung der Mechanik, andererseits zur Reformation der Astronomie.

Tycho de Brahe, der dänische Standesherr, war durch seinen Rang, durch die Beziehungen, in denen er zu fürstlichen Personen stand, durch seine weitverzweigten Verbindungen mit der gelehrten Welt, durch seine tiefen und umfassenden Kenntnisse gewissermassen der Humboldt seiner Zeit. Er war der Gründer einer neuen astronomischen Beobachtungskunst. Sein Bestreben war wie das eines Hipparch, eines Flamstead, Bradley und Bessel auf Berichtigung der Fundamente der Astronomie gerichtet. Es schwebte ihm die grosse Aufgabe vor, Beobachtungen zu liefern, aus denen sich die besondere Theorie jedes Himmelskörpers entwickeln lasse. Seinen Beobachtungen lag daher ein systematischer Plan zu Grunde, sie wurden von einer richtigen Einsicht in das Verhältniss der Theorie zur Beobachtung geleitet. Sein Observatorium, das bis dahin noch nicht seines Gleichen gehabt hatte, seine Instrumente und deren Aufstellung, seine Methode zu beobachten, die Direction der Arbeiten seiner Gehilfen, Alles entsprach dem grossen Zweck. Tycho de Brahe starb, ehe er sein Werk vollenden konnte, aber die Früchte seines Fleisses und seines Talentes gingen der Wissenschaft nicht verloren.

Galilei, der Schöpfer der Phoronomie und Mechanik, wird gewöhnlich als einer der Erfinder der inductiven Wissenschaften oder der Erfahrungswissenschaften genannt. Hierbei muss man aber das, wozu diese Wissenschaften auf dem Wege der Induction gelangt sind, unterscheiden von dem, was sie auf dem Wege der Abstraction und Demonstration gewonnen haben. Galilei ging, wie ich schon oben gesagt habe, den letztern Weg. Er pflegte zu sagen: „die Philosophie steht geschrieben in dem Buche der Natur, das vor unsern Augen liegt, aber dieses Buch kann nicht verstanden werden, bevor wir nicht die Sprache und die Charaktere gelernt haben, worin es geschrieben ist.“ Der Schlüssel zum Verständniss dieses

Buches war ihm das Experiment und die Mathematik. Galilei's Feld der Forschung war eigentlich die angewandte Mathematik, die mathematische Naturphilosophie. Hier konnte er auf keinem gegebenen Fundamente weiter bauen, sondern er musste erst das Fundament dieser Wissenschaft selbst legen. Dazu gehörte nicht bloss ein mathematisches Talent, sondern auch ein Mann von philosophischem Geiste. Dem Galilei stand eine richtige Logik und eine einfache und elegante Form der Darstellung zu Gebote. Mit unübertroffener Klarheit und Bündigkeit deckte er die Fehler in den alten Trugschlüssen für die Ruhe der Erde auf, welche dem Scharfsinne des Aristoteles entgangen waren, vertheidigte mit siegreichen und einleuchtenden Gründen die neue Lehre des Copernicus und verbannte die fünf regulären Körper, die pythagoreisch-platonischen Weltfiguren, für immer aus der Physik. Eine Antwort, welche er dem Vincenzio di Grazia gab, der die Beweiskraft einer von ihm angeführten Induction anfocht, weil sie nicht alle Einzelheiten aufzähle, zeigt, dass er auch in die Theorie der Induction richtige Blicke gethan hatte. Wenn die Induction, erwiedert er, durch alle Fälle hindurchgehen müsste, wäre sie entweder nutzlos oder unmöglich; — unmöglich, wenn die Anzahl der Fälle unendlich ist; nutzlos, weil dann der allgemeine Satz nichts Neues unserer Erkenntniss hinzufügen würde. Allein ohnerachtet dieser richtigen theoretischen Ansichten und obschon Galilei und seine Schule zuerst die Kunst des Experimentirens erfand, so ist, ich wiederhole es, in der Praxis die Induction doch nicht das eigentliche Werkzeug seiner Naturforschung.

Der wahre Erfinder der inductorischen Methode der Naturforschung ist Keppler. Seine Kunst der Entzifferung der Charaktere, in denen das Buch der Natur geschrieben ist, weicht, wenn man sie genauer untersucht, wesentlich von der des Galilei ab. Er und Galilei fussen beide auf Erfahrung, aber Galilei analysirt dieselbe, Keppler schliesst aus ihr. Galilei geht den Gedankengang *διότι*, Keppler den Gedankengang *ὅτι*. Galilei beweist aus Grundsätzen, Keppler aus Beobachtungen und Messungen. Das Fallgesetz, sowie das Gesetz der

parabolischen Wurfbewegung sind progressiv (durch hypothetische Schlüsse) aus dem Grundsatz der Relativität aller Bewegung abgeleitet, die Gesetze Keppler's dagegen sind regressiv d. i. inductorisch erschlossen worden. Das, was Galilei suchte und fand, waren allerdings keine Lehrsätze einer abstracten Wissenschaft, sondern Naturgesetze. Aber zwei von diesen (das Gesetz der Trägheit und das Gesetz der Relativität aller Bewegung) sind Grundsätze der mathematischen Naturphilosophie, die durch Abstraction aus der Erfahrung gefunden wurden; die beiden andern (das Fallgesetz und das Gesetz der parabolischen Wurfbewegung) wurden durch Demonstration aus jenen abgeleitet. Auch tragen diese beiden letztern einen anderen Charakter an sich als die Keppler'schen Gesetze. Denn sie gehören streng genommen vielmehr zu unsern einfachsten mathematischen Reflexionen über die Natur der Bewegung, als in die Klasse der eigentlichen Naturgesetze. In der Natur selbst findet nämlich keine constante, sondern die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung veränderliche Beschleunigung statt. Also nicht das Galilei'sche Fallgesetz, sondern das Newton'sche Gravitationsgesetz ist das wahre Naturgesetz. Ebenso bewegen sich wegen des Luftwiderstandes die geworfenen Körper nicht in Parabeln, sondern in ballistischen Curven. Die Keppler'schen Gesetze dagegen wurden nicht durch Geometrie der Erfahrung vorgeschrieben, sondern vermittelst Geometrie und Rechnung der Erfahrung abgefragt und waren mit dieser innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Tychonischen Beobachtungen in völliger Uebereinstimmung. Sobald Keppler sich der Speculation überlässt, ist er sich wie Galilei mit seiner Philosophie und Geometrie selbst genug, aber ehe er den Weg der Induction betreten konnte, musste die Tychonische Sternwarte erst das nöthige Material geliefert haben.

Keppler's inductiver Sinn, sein Bestreben, alle seine Annahmen an der Erfahrung zu prüfen, zeigt sich schon in seinem *Mysterium cosmographicum*. Später, nach der Bekanntschaft mit Tycho de Brahe, erweiterte sich seine Aufgabe zur Physik des Himmels. Indessen physische Gründe leiteten ihn

nicht immer im Suchen. Seine leitenden Maximen sind meist reinmathematisch, zum Theil, wie bei der Entdeckung des dritten Gesetzes, der Harmonie des Himmels entlehnt. Keppler's Theorie ist bloss formell und nicht physisch. Die drei Keppler'schen Gesetze lassen sich aus dem Gesetz der Gravitation wirklich ableiten, aber das, was Keppler seine physischen Gründe nennt, die Rotationskraft der Sonne und die Magnetkräfte der Planeten, steht in einem sehr lockern Zusammenhang mit denselben und es lässt sich daraus höchstens ihre Möglichkeit, aber nicht ihre Wirklichkeit begreiflich machen.

Der Weg, auf welchem Keppler zur Erkenntniss der wahren Figur der Marsbahn gelangte, war mit ungewöhnlichen Schwierigkeiten umgeben. Das Merkmal der Ellipticität war kein Gegenstand der Sinnesanschauung und konnte daher auch nicht durch unmittelbare Beobachtung mit der Marsbahn verbunden werden, sondern musste erst künstlich und mittelbar aus der Erfahrung eruirt werden. Bei der Exposition, welche ich oben von der logischen Form der Keppler'schen Induction gegeben habe, ist vorausgesetzt, dass Keppler die wahre Anomalie v direct finden und dann für jeden Werth von v unmittelbar auch den zugehörigen Werth von r berechnen konnte. Es kam nämlich hier Alles auf die Vergleichung der beobachteten und der berechneten Werthe von v und r an, aber diese Werthe waren weder so einfach zu beobachten, noch so einfach zu berechnen. Um einen vollständigern Begriff von der Beschaffenheit seiner Aufgabe zu bekommen, müssen wir noch die Schwierigkeiten berücksichtigen, die zu beseitigen waren, um sowohl empirisch wie theoretisch zur Kenntniss der Werthe von v und r zu gelangen.

1. Schwierigkeiten der empirischen Ortsbestimmung. Da wir den Planeten von der Erde und nicht von der Sonne aus beobachten, so können wir seinen heliocentrischen Ort oder seine wahre Anomalie (die Lage seines Radius Vector) nur durch Beobachtungen zur Zeit der Opposition finden. In der, einen Zeitraum von 20 Jahren umfassenden Tychonischen Beobachtungsreihe des Mars waren 12 Oppositionen enthalten. Diese waren aber für die Bestimmung der Figur der Bahn

schon aus dem Grunde unzureichend, weil sie die Entfernungen des Planeten von der Sonne ungewiss lassen. Die Entfernungen ergeben sich aus den jährlichen Parallaxen d. i. den Unterschieden der heliocentrischen und geocentrischen Längen. Um diese zu finden, muss man die geocentrischen Planetenörter in heliocentrische verwandeln können. Dies setzt aber die Theorie der Bewegung des Planeten als bekannt voraus. Man hat alsdann, um die Entfernung des Planeten von der Sonne zu finden, ein Dreieck aufzulösen, dessen Grundlinie der Radius Vector der Erde und dessen anliegende Winkel, der eine, die Lage der geocentrischen Gesichtslinie, durch Beobachtung, der andere, die Lage der heliocentrischen Gesichtslinie, durch Rechnung gegeben sind. Da die Theorie des Mars noch unbekannt war und erst gesucht wurde, so ersann sich Keppler ein äusserst sinnreiches Hilfsmittel, um für jeden beliebigen Zeitpunkt die heliocentrische Länge des Mars bis auf eine Minute d. i. ebenso genau als die Tychonischen Beobachtungen waren, finden zu können. Dies ist die von ihm sogenannte stellvertretende Hypothese, *Hypothesis vicaria*, die den 12 Oppositionsörtern angepasst war und von der er selbst sagt: *Invenienda erat hypothesis ex Acronychiis, quæ locum Eccentricum monstret ad quodcunque Tempus, etiam cum non est ibi acronychia oppositio.* *)

Damit war aber erst die Lage des Radius Vector, der empirische Werth von v, und noch nicht die Grösse desselben, der empirische Werth von r gegeben. Um auch diese finden zu können, was erforderlich war, um empirisch von den scheinbaren auf die wahren Marsörter zu kommen, ersann sich Keppler seine schöne Methode der Messung der Entfernungen des Mars durch Verbindung zweier Beobachtungen, die genau um die Dauer der siderischen Umlaufszeit auseinander, also auf dieselbe Stelle der Bahn fallen — eine Methode, die von der Theorie des Planeten völlig unabhängig ist.

2. Schwierigkeiten der theoretischen Ortsbestimmung. Die Aufgabe ist hier die: für einen gewissen Zeitpunkt die

*) S. meine Reformation der Sternkunde, S. 358.

Lage des Radius Vector und aus dieser seine Grösse zu finden. Da der Radius Vector r auf jeden Fall eine Function seines Drehungswinkels oder der wahren Anomalie v ist, so muss man einerseits v, andererseits die Functionsform kennen, um den zugehörigen Werth von r berechnen zu können. Die Form der Function $r = f(v)$ d. i. das Gesetz der Abhängigkeit der Grösse des Radius Vector von seiner Drehung oder die Gleichung der Bahn war es eben, was Keppler suchte. Dazu ist erforderlich, dass man für jeden Zeitpunkt die Grösse des Drehungswinkels v finden könne. Da dieser Winkel (die wahre Anomalie) sich mit der Zeit verändert, so ist er selbst eine Function der Zeit, also $v = \varphi(t)$ und $r = f(v) = f[\varphi(t)]$. Um also für irgend einen gegebenen Zeitpunkt den Werth von v theoretisch bestimmen zu können, muss man das Gesetz der Abhängigkeit des Drehungswinkels von der Zeit d. i. die Form der Function $v = \varphi(t)$ kennen. Hier stösst man auf die Schwierigkeiten des Keppler'schen Problems.

Gesetzt, der Planet befinde sich in dem Zeitpunkte T_0 an dem Orte seines Apheliums und in dem Zeitpunkte T_1 sei durch eine Oppositionsbeobachtung seine wahre Anomalie $= v_1$ gefunden worden, die Zwischenzeit $T_0\,T_1$ sei $= t$ und die mittlere Bewegung des Planeten $= n$, wo n eine constante Grösse ist, so käme es darauf an, aus n und t den Werth der wahren Anomalie so abzuleiten, dass er mit dem durch Beobachtung gefundenen Werthe von v_1 übereinstimmt.

Drehte sich der Radius Vector gleichförmig, so liesse sich ohne Schwierigkeit sein Drehungswinkel aus der Zeit finden. Da dies aber nicht der Fall ist, so muss man das Gesetz seiner Drehung kennen. Dies ist das zweite Keppler'sche Gesetz: das Gesetz der Proportionalität der Flächenräume mit den Zeiten. Dieser Flächenraum ist begrenzt durch die Lage des Radius Vector in den beiden Zeitpunkten T_0 und T_1 und durch den zugehörigen Bogen der Curve. Man muss also die Curve schon kennen, um die *Area* und den zu ihr gehörigen Centriwinkel berechnen zu können. Da Keppler dieselbe noch nicht kannte, so war er genöthigt, die Figur der Bahn hypothetisch anzunehmen. Seine erste Annahme war der ex-

centrische Kreis, in welchem sich der Planet nach dem zweiten Keppler'schen Gesetz bewegt. Seine zweite Annahme eine durch besondere epicyklische Bewegung entstandene Curve, welche er Ooide nannte.

Einige Schriftsteller, welche die Regeln der Induction von dem Keppler'schen Verfahren zu abstrahiren versuchten, sind hierdurch zu falschen Ansichten über den Gegenstand verleitet worden. Jene Unvermeidlichkeit der Hypothesen gehört nämlich nicht, wie Whewell und Andere zu glauben geneigt scheinen, zum Wesen der Induction überhaupt, sondern entspringt aus der besondern Natur der hier vorliegenden Aufgabe.

Um zur Kenntniss der Figur der Bahn zu gelangen, musste Keppler für jeden beliebigen Zeitpunkt die Grösse des Drehungswinkels des Radius Vector oder die wahre Anomalie v theoretisch bestimmen können. Dies konnte nur vermittelst des zweiten Keppler'schen Gesetzes geschehen. Dieses Gesetz der Drehung des Radius Vector liess sich aber unabhängig von der Kenntniss der Curve nicht zur numerischen Berechnung eines wirklichen Falls anwenden. Oder mit andern Worten: die Grösse des Radius Vector (r) hängt von seiner Lage (v) ab, aber die Lage desselben (v) hängt nicht bloss von der Zeit t, sondern auch von der Figur der Bahn ab. Dies liegt in der Beschaffenheit des zweiten Keppler'schen Gesetzes. So setzte eins das andere voraus. Keppler musste daher eine willkührliche Annahme (Hypothese) über die Figur der Bahn machen und dann untersuchen, wie die aus dieser abgeleiteten wahren Anomalien mit denen für dieselben Zeitpunkte empirisch gegebenen übereinstimmten.

Als Keppler auf diese Weise seine beiden Annahmen der physischen Kreishypothese und der Ooide an der Erfahrung prüfen wollte, stiess er bei der letztern auf die Schwierigkeiten der Quadratur dieser Curve. Da zufolge des zweiten Gesetzes die Sectoren der Curve den Zeiten proportional wachsen, so liess sich aus der seit dem Durchgange durchs Aphel verflossenen Zeit leicht angeben, der wie vielte Theil des Ganzen der zugehörige Sector sei. Aber um die Grösse des Ganzen zu

finden, war die Quadratur der Ooide erforderlich. Um diese wenigstens näherungsweise zu erlangen, substituirte Keppler eine Ellipse, deren kleine Axe dem kleinsten Durchmesser der Figur gleich war und in der die Sonne ausserhalb des Brennpunktes lag. Hier kam Keppler zuerst auf die Auflösung des nach seinem Namen genannten Problems. Die wahre Anomalie v lässt sich bekanntlich aus der mittlern Anomalie d. i. aus der Zeit t und der mittlern Bewegung n direct nur durch die Analysis des Unendlichen finden. Man kann indess die Aufgabe bedeutend vereinfachen, wenn man wie Keppler die excentrische Anomalie als Hilfsmittel einführt. Man kommt alsdann auf die bekannte Gleichung von transcendenter Form

$$nt = E - e \sin E.$$

Hat man durch Auflösung dieser Gleichung E bestimmt, so lässt sich daraus der Werth von v geometrisch oder trigonometrisch finden. Zwischen der Ellipse und dem um ihre grosse Axe als Durchmesser beschriebenen Kreise (dem sogenannten excentrischen Kreise) findet ein bemerkenswerther Zusammenhang nach dem Gesetz der orthographischen Projection statt. Bei der orthographischen Projection ist die Spitze des Kegels unendlich entfernt d. i. der Kegel wird zum Cylinder. Also steht die Ebene des Kreises auf der Projectionsebene senkrecht, wenn sie mit der Seitenlinie des Kegels parallel ist. Die orthographische Projection des Kreises ist daher immer eine Ellipse und kann nie eine Parabel oder Hyperbel werden. Aus dem Gesetz der orthographischen Projection nun folgt die Proportionalität zwischen den Ordinaten und Flächen der Ellipse und denen des excentrischen Kreises. Die Gleichung $nt = E - e \sin E$ fliesst zunächst aus der Natur des excentrischen Kreises und gilt zufolge des eben angegebenen Zusammenhangs desselben mit der Ellipse auch für diese.

Keppler versuchte jetzt vermittelst dieser Gleichung $nt = E - e \sin E$ die Berechnung der Anomalien. Der excentrische Kreis gab die wahren Anomalien grösser und die Ooide kleiner als sie nach den Beobachtungen oder der stellvertretenden Hypothese sein sollten. Die Wahrheit musste also in der Mitte zwischen beiden Annahmen liegen. Nun fand

er weiter, wenn die excentrische Anomalie E war, so war die Grösse des Radius Vector $1 + e \cos E$. Dies Gesetz der Veränderung der Grösse des Radius Vector liess sich noch als eine Modification der epicyklischen Bewegung (als eine Libration im Durchmesser eines Epicykels) darstellen. Als er dies that, erhielt er aber einen Werth für die wahre Anomalie v, der nicht mit dem empirisch gegebenen stimmte. Die empirisch gegebenen Werthe von v führten ihn wieder auf die Gleichung der Ellipse und nun erst suchte und fand er die Ableitung der Gleichung $r = 1 + e \cos E$ aus der Polargleichung der Ellipse oder den geometrischen Beweis der Gleichheit des elliptischen Radius Vector mit der durch die Libration im Durchmesser eines Epicykels verkürzten Entfernung. So erst wurden seine Sätze für die Induction schlussgerecht. Jenes Gesetz der Veränderung der Grösse des Radius Vector, welches er noch unabhängig von der wahren Anomalie v durch die Libration im Durchmesser eines Epicykel dargestellt hatte, hängt mit dem empirisch gefundenen Gesetz der Drehung des Radius Vector allein durch die Figur der Ellipse zusammen, in deren Einem Brennpunkte die Sonne steht.

Gleichzeitig mit Tycho de Brahe, Keppler und Galilei lebte Baco von Verulam, der nicht nur unter den Gründern der inductiven Wissenschaften genannt wird, sondern öfters als der höchste Gesetzgeber im Reiche dieser Wissenschaften betrachtet worden ist. Wenn man jedoch unpartheiisch den Antheil untersucht, den Bacon an der Gründung dieses grossen Werkes gehabt hat, so muss man bekennen, dass er weder das Talent noch die Kenntnisse besass, um selbst eine naturwissenschaftliche Induction zu machen, ja dass er nicht einmal mit den Regeln dieser Schlussart hinreichend bekannt war. Sein Verdienst liegt nicht darin, worin es Andere gesucht und worin er es selbst gesetzt hat, dass er eine „neue Aera" in der Wissenschaft herbeigeführt habe. Diese Aera war längst angebrochen und er war nur der begeisterte und beredte Apostel derselben. Auch nicht darin, dass er eine „neue Methode" der Naturforschung entdeckt hätte. Diese Methode, die er eifrig empfahl, von der er aber selbst irrige Vorstellungen besass,

war in der That von Keppler gefunden worden. Er verhielt sich zu der neuern Astronomie und Physik, die unter Tycho de Brahe's, Kepplers und Galilei's Händen so glücklich gedieh, etwa wie Voltaire zu Newtons mathematischer Naturphilosophie. Er war kein Eingeweihter in die Geheimnisse dieser Wissenschaft, dazu fehlte ihm der Schlüssel zu ihrem Verständniss: die mathematische Bildung. Aber er besass eine richtige instinctive Ahnung von dem Werthe und den Vorzügen dieser Wissenschaften und er wusste dieses Gefühl dem Publicum mitzutheilen. Aber sein Verdienst beschränkte sich darauf nicht, sondern er hat in der That einen reellen Antheil an dem grossen Werke der Gründung der Erfahrungswissenschaften. Nur liegen seine wahren Leistungen nicht da, wo man sie gewöhnlich sucht. Sein bleibendes Verdienst besteht vielmehr darin, dass er die philosophischen Begriffe von der Naturgesetzgebung, welche den inductiven Wissenschaften zu Grunde liegen, zuerst aufklärte und mit der neuern Physik in Einklang brachte, endlich darin, dass er die Irrthümer des Aristoteles über diesen Gegenstand berichtigte.

Bacon steht bei weitem mehr auf den Schultern des Aristoteles, als die von ihm gangbare Tradition berichtet. Keppler und Galilei hatten mit der aristotelischen Philosophie gänzlich gebrochen, Bacon suchte sie zu reformiren. Diese Philosophie hatte zwei Wurzeln: die *ἐμπειρία* und den *νοῦς*, die Erfahrung und die reine Vernunft. Die Scholastiker, welche die Lehre systematisch aus ihren Principien entwickelten, behielten den *νοῦς* als das Vermögen der Principien bei und liessen die *ἐμπειρία* fallen. Bacon dagegen verwirft umgekehrt den *νοῦς* und so wird ihm die *ἐμπειρία* vermittelst der *ἐπαγωγή* die Quelle der Principien. „Die Induction, so lehrt er, nimmt keine Urbegriffe des Verstandes an und beruhigt sich auch nicht mit der unmittelbaren Unterweisung der Sinne.“ Das erstere ist die Consequenz der Verwerfung des *νοῦς*, das andere der aristotelische Unterschied zwischen *αἴσθησις* und *ἐμπειρία*.

„Die Induction ist die Kunst und Methode die Natur zu befragen. Durch sie erhebt man sich von dem Einzelnen durch stetige Mittelstufen zu dem Allgemeinen. Durch sie lernt man

in dem Wechselnden die Spuren von dem Bleibenden, Beständigen, Wesentlichen, von dem gesetzmässigen Verfahren der Natur und in dem Materiellen die Form der Natur entdecken." Dies stufenweise Emporsteigen von den besondern zu den allgemeinen Wahrheiten, diese schrittweise Verallgemeinerung der Ansichten (*successive generalisazion* nach Whewells Ausdruck) ist vielmehr der Charakter der Abstraction als der der Induction.

Der Gegenstand der Induction ist also *τὸ εἶδος*, *forma*. *Τὸ εἶδος* ist nach Aristoteles etwas Einzelnes, Wirkliches, Substantielles; nach Bacon dagegen etwas Allgemeines und Nothwendiges, eine allgemeine Regel ohne Wesenheit: das Naturgesetz. Die formale Ursache ist das Gesetz und dieses ist die eigentliche Natur. Diese Umbildung der aristotelischen Lehre von den vier Gründen im Sinne der modernen Physik und die Verbannung der Endursachen aus der Physik ist das eigentlich Neue, was die moderne Weltansicht dem Bacon verdankt. Damit war im Grunde schon das alte Räthsel der Realität des Allgemeinen gelöst und die Antinomie des Wirklichen und Nothwendigen geschlichtet. Platon betrachtete die allgemeinen Vorstellungen gleichsam wie Vorstellungen von Gegenständen, die ausserhalb der Sinnenwelt eine selbstständige Existenz haben. Er unterschied deshalb streng zwischen *ἰδέα* und *εἶδος*. *ἰδέα* ist ihm nicht die Form, sondern der Gegenstand der allgemeinen Vorstellung d. i. der nicht sichtbare, sondern nur denkbare oder durch *τὸ εἶδος* erkennbare Gegenstand. Aristoteles verwarf die Giltigkeit dieser Unterscheidung und die Annahme solcher von der Sinnenwelt getrennt existirender Gegenstände reiner Begriffe, aber er schrieb demohnerachtet dem *εἶδος* Substantialität (Wesenheit) zu und verwandelt unter dem Namen der Entelechie den Begriff in ein besonderes geisterhaftes Wesen. Beide Philosophen des Alterthums setzen also, jeder nur in anderer Weise, die Realität des Allgemeinen in die Begriffe, Platon, indem er eine nur denkbare Welt von der sichtbaren trennt, Aristoteles, indem er beide wieder mit einander vereinigt. Jetzt bringt Bacon die gewichtige Entscheidung hinzu: nicht der Begriff, sondern

das Gesetz trägt den Charakter der Realität des Allgemeinen an sich. Kein durch τὸ εἶδος vorgestelltes Einzelwesen (keine aristotelische Entelechie), sondern ein wesenloses Gesetz ist der Grund der Erscheinungen und der höchste Grund der Veränderungen in der Natur. Das Gesetz für sich besitzt wohl Nothwendigkeit, aber keine Wirklichkeit, es ist nur eine nothwendige Regel der Verknüpfung der Thatsachen, die Wirklichkeit der Thatsachen wird unabhängig von dem Gesetz durch die Anschauung gegeben. Die Wahrheit der menschlichen Erkenntniss besteht daher weder in der Erkenntniss des Nothwendigen (wie Platon wollte) noch in der Erkenntniss des Wirklichen (wie die Ansicht des Aristoteles war) für sich allein, sondern in der Unterordnung des Wirklichen unter das Nothwendige, der Thatsachen unter das Gesetz. Dies ist die einfache Auflösung der Antinomie des Wirklichen und Nothwendigen, wie sie durch die Entdeckung der Erfahrungsmethoden in den Naturwissenschaften gefunden wurde. Diese Auflösung hat allerdings Bacon noch nicht selbst gegeben, vielmehr liegt dessen Bestreben, die ganze menschliche Erkenntniss von der Erfahrung abhängig zu machen, die falsche Voraussetzung zu Grunde, dass sich das Nothwendige aus dem Wirklichen ableiten lasse; aber die Belehrung, welche er über die Bedeutung des Naturgesetzes in unserer Erkenntniss giebt, musste in Verbindung mit den Arbeiten Kepplers und Galilei's zur richtigen Ansicht führen.

Bemerkenswerth ist noch Bacons Unterschied zwischen *anticipatio naturæ* und *interpretatio naturæ*. Das eine ist der Weg der Hypothesen, das andere der Weg der Induction. Um den letztern betreten zu können, muss man die Natur des Phänomens durch Beobachtung und Experiment studiert oder durch die Kunst des Experiments die Wirkungsweise einer Ursache erforscht haben, zu dem erstern reicht ein flüchtiger Anblick der Erscheinungen hin. Die eine macht eine Fiction, die andere muss sich vergewissern, dass ihr Erklärungsgrund auch eine *vera causa* ist.

Neben den Verdiensten Bacons dürfen aber auch seine Fehler und Irrthümer um so weniger verschwiegen werden,

als diese mit blinder despotischer Gewalt noch bis auf den heutigen Tag in der Wissenschaft fortwirken. Vor allem muss hier gerügt werden der Mangel an einer logischen Theorie der Induction in dem *Novum Organon*. Da Bacon die Urbegriffe des Verstandes verwirft, so hat er keine leitenden Maximen für seine Inductionen. Da er die logische Form der Induction, das sicherste und untrügliche Kennzeichen derselben, nicht kennt, so fällt er in den Fehler der Verwechselung der Abstraction mit Induction und macht die letztere zur Quelle der Principien. Dabei fehlt ihm jede Einsicht in das Wesen der mathematischen Erkenntniss, jede Ahnung von der Herrschaft der Mathematik über die Natur. Dies ist die Folge seines Empirismus. Die Baconische Naturphilosophie hat keine Antwort auf die Fragen: 1. woher die Ordnung der Natur stamme, 2. ob die Naturgesetze unveränderlich sind, 3. warum sie den mathematischen Charakter an sich tragen und 4. warum und wie sie von Beobachtungsfehlern unabhängig werden. Sie überlässt es dem Zufall, wie weit die Naturforschung in der Reihe der Erklärungsgründe zurückführen werde und weiss nicht zu sagen, ob und wann sie an dem letzten und höchsten Erklärungsgrund angelangt ist. Newtons mathematische Naturphilosophie hat in der That schon die engen Fesseln der Baconischen Naturphilosophie zersprengt und gezeigt, dass die Geometrie und nicht die Erfahrung der Natur das Gesetz giebt.

Newtons tiefer und grosser Geist drückte der neuen Naturwissenschaft das Siegel der Vollendung auf. Es giebt keinen zweiten Geist wieder, in welchem so verschiedenartige Fähigkeiten in so hohem Grade und in so vollkommenem Ebenmaass vereinigt gefunden würden: die Gabe der Abstraction neben dem Talent der Demonstration und dem Talent der Induction. Wenn sich sein demonstratives Talent isolirt vorzugsweise in seinen mathematischen Erfindungen, sein inductives Genie in seinen optischen Entdeckungen zeigt, so sehen wir in seinen *Principiis philosophiæ naturalis mathematicis* alle seine eminenten Geistesfähigkeiten zusammenwirken. Den Ruhm der Erfindung der Analysis des Unendlichen theilt er mit Leibnitz,

aber in seiner Hand wurde dieser Alles bewältigende Calcul zugleich das gewaltigste Werkzeug der Naturforschung und der Schlüssel zu den tiefsten und verborgensten Naturgeheimnissen. „Auf dem Wege der Analysis, sagt er selbst, schreiten wir fort von dem Zusammengesetzten zu dem, woraus es besteht, wie von den Bewegungen zu den Kräften, welche sie hervorbringen, und im Allgemeinen, von den Wirkungen zu ihren Ursachen und von besondern Ursachen zu mehr allgemeinern bis wir zu den allgemeinsten und letzten Ursachen der Erscheinungen gelangen.“ *) Seine ingeniösen optischen Untersuchungen: der prismatische Versuch, welcher zuerst den Ursprung der Farben aus dem Lichte enthüllte sowie das Studium der Farben dünner Blättchen, welches zuerst zu einer Messung der Länge der Lichtwellen führte, widerlegten hinreichend die Behauptung Bacons, dass durch seine Regeln das Genie entbehrlich und alle Arten des Genius auf gleiche Höhe gebracht würden. Alle seine übrigen Arbeiten, wie bedeutend sie auch an sich sind, treten jedoch in den Hintergrund zurück vor seinen mathematischen Principien der Naturphilosophie, welche Laplace als das grösste Werk des menschlichen Geistes bewunderte und welche gleichsam das Gesetzbuch der Natur enthalten. Zweierlei war damit gewonnen: die Feststellung der mathematischen Naturphilosophie für ewige Zeiten und die Gründung der physischen Astronomie oder der Mechanik des Himmels. Die Entdeckung des wahren Naturgesetzes d. i. die Entdeckung der Gravitation, welche mit Hilfe der mathematischen Naturphilosophie auf inductivem Wege gemacht worden war, führte auf demonstrativem Wege zur Erklärung von Phänomenen, deren Erklärung anfangs gar nicht gesucht war, sie lehrte die Berechnung der Störungen der Planeten- und Kometenbahnen, die Berechnung der Figur der Weltkörper, des Zurückweichens der Nachtgleichen sowie der Ebbe und Fluth. In Newtons unsterblichem Werke war zum erstenmale die richtige theoretische Verbindung der drei verschiedenartigen, bereits von Platon unterschiedenen mensch-

*) Optics. Qu. 31.

lichen Erkenntnissarten gegeben: der empirischen, der mathematischen (dianoetischen) und philosophischen (noetischen). Damit war zugleich das logische Räthsel der ἐπιςήμη gelöst. Die *Principia* sind ein unübertroffenes und unübertreffbares Muster, von dem sich die logische Form der Wissenschaft und Theorie ganz sicher abstrahiren lässt.

Newton stellt an die Spitze des dritten Buchs, welches den Bau des Weltsystems aus den Principien seiner Naturphilosophie erklärt und den Uebergang aus dem Gebiet der apodiktischen, philosophisch-mathematischen Erkenntniss in das der empirischen bildet, seine vier berühmten *Regulæ philosophandi:*

1. Man darf keine andern Ursachen natürlicher Dinge zulassen, als solche, welche wahr (*veræ*) sind, und den zu erklärenden Erscheinungen derselben genügen.

2. Daher muss man, so lange als möglich, Wirkungen derselben Art derselben Ursache zuschreiben.

3. Eigenschaften der Körper, die weder vermehrt noch vermindert werden können, und welche allen Körpern zukommen, mit denen man Versuche anstellen kann, sind als Eigenschaften aller Körper anzunehmen.

4. Sätze, welche durch Induction aus den Erscheinungen abgeleitet sind, müssen, entgegenstehender Hypothesen ungeachtet, so lange als sicher oder als wahrscheinlich angesehen werden, bis andere Erscheinungen sie entweder ganz bestätigen oder zeigen, dass sie Ausnahmen unterworfen sind.

Whewell hat treffend bemerkt,*) dass Newton bei der Aufstellung dieser methodischen Regeln hauptsächlich seinen eigenen Fall der Entdeckung der allgemeinen Schwere vor Augen gehabt habe. Durch die erste Regel soll die Gravitation als eine *vera causa* der Himmelserscheinungen gerechtfertigt werden. Die zweite ist zum Schutz der Ansicht, dass die planetarischen Bewegungen ebenso wie die irdischen Bewegungen von einer mechanischen Kraft regiert werden. Die dritte soll die Behauptung unterstützen, dass die Schwere eine allge-

*) *Philosophy of inductive Sciences* II, 279.

meine Eigenschaft der Körper sei und die vierte enthält, neben einer Erklärung über die Autorität der Induction im Allgemeinen, Newtons Protest gegen Hypothesen und ist ins Besondere gegen die Hypothesen der Cartesianer gerichtet.

Wir müssen bemerken, dass diese methodischen Regeln Newtons eigenem Werke, den Principien der mathematischen Naturphilosophie, nicht vollständig entsprechen. Die dritte Regel macht die Bestimmung der allgemeinen Eigenschaften der Körper ganz von der Erfahrung abhängig. Dabei ist die Herrschaft der Philosophie und Mathematik über die Erfahrung ausser Acht gelassen. Die nothwendigen Gesetze der Geometrie und reinen Bewegungslehre gelten uns aller Erfahrung voraus als Bedingungen, denen sich alle Erfahrung unterwerfen muss und nach denen wir zuletzt auch allein bestimmen, was möglicherweise in der Natur vorkommen kann oder nicht. Newton nennt als allgemeine Eigenschaften der Körper: Ausdehnung, Beweglichkeit, Trägheit, Härte und Undurchdringlichkeit. Von diesen werden Ausdehnung und Beweglichkeit rein mathematisch erkannt, das Gesetz der Trägheit ist ein naturphilosophisches; Härte und Undurchdringlichkeit aber sind empirische Begriffe, von denen man heut zu Tage einzusehen anfängt, dass sie keine allgemeinen Eigenschaften der Körper sind. Whewell macht bei der Kritik dieser dritten newtonschen Regel die Bemerkung,*) dass das Gesetz der Schwere, obschon seine Allgemeingiltigkeit stattfinden möchte, doch nicht dieselbe Nothwendigkeit zu haben scheine, wie die Fundamentalgesetze der Bewegung; und er fügt hinzu, dass dieser Gegenstand zu den abstrusesten und schwierigsten Fragen der ganzen Philosophie gehöre, indem er das tiefe, und vielleicht unlösliche Problem der Identität oder Verschiedenheit der Vorstellungen und Gegenstände in

*) *Philosophy of inductive Sciences* II, 290: *It was also stated, that the law of gravitation, though its universality may be deemed probable, does not apparently involve the same necessity as the fundamental laws of motion. But it was pointed out that these are some of the most abstruse and difficult questions of the whole of philosophy; involving the profound, perhaps insoluble, problem of the identity or diversity of Jdeas and Things.*

sich schliesse. Wir sind der Meinung, dass dieses angebliche Räthsel verschwinde, wenn man das Verhältniss der empirischen zur mathematischen (dianoetischen) und philosophischen (noetischen) Erkenntnissweise in der Theorie*) sowie den Unterschied zwischen Induction und Abstraction begriffen hat.

Newton gab dem Vorurtheil der alleinigen Abhängigkeit unserer Erkenntniss von der Erfahrung nach, obschon er ihm *in praxi* untreu geworden war. Aber durch Locke wurde dieses Grundvorurtheil des Empirismus in der Philosophie in England und Frankreich ausgebreitet und festgestellt. Aus der Entwickelung der Lockeschen Ansichten ging Hume's Skepticismus hervor, der eine gewaltige Gährung in der speculativen Welt hervorrief.

Hume konnte in unserm Glauben an die Aufeinanderfolge von Ursach und Wirkung nichts anderes sehen, als die Gewohnheit, in unserm Geiste das zu associiren, was schon öfters in unserer Erfahrung associirt gewesen ist. Er gab daher nicht zu, dass man den Glauben (*belief*) an eine solche Succession über das Feld der gemachten Erfahrungen hinaus ausdehne. Wir sehen, sagt er, eine wirkliche Verbindung (*conjunction*) zweier Ereignisse, aber wir können keineswegs eine nothwendige Verknüpfung (*connexion*) derselben entdecken, und wir haben daher kein Mittel, um von den Wirkungen auf die Ursachen, oder von den Ursachen auf die Wirkungen zu schliessen. Die Erfahrung ist die einzige Quelle unserer Erkenntniss.

Die Verbindung zwischen der Aufeinanderfolge, welche wir beobachten, und der Ursache, welche wir hinzubringen, der Zusammenhang der Erinnerung an eine in der Vergangenheit dagewesene Verbindung von Ereignissen mit dem Glauben an eine in der Zukunft wieder eintretende Verbindung derselben beruht nach Hume und seinen Schülern (Brown und Stewart) bloss auf den Gesetzen der Association. Das Causalgesetz wird zufolge dieser Lehre ein bloss subjectives Gesetz der Association wie das der Aehnlichkeit und der Nebenordnung in Zeit und Raum. So wird das Gesetz der Erwartung

*) Siehe oben S. 106.

ähnlicher Fälle das Princip der Induction und die Principien der mathematischen Naturphilosophie, die naturphilosophischen Grundgesetze der Bewirkung von Bewegungen werden ganz übersehen. Hume unterscheidet die bloss subjectiven Gesetze der Erinnerung nicht von den objectiven Gesetzen der Erkenntniss. Auf jenen beruht die Verbindung zweier Vorstellungen in einem erkennenden Subject, auf den letztern die durch die Natur des Objects bestimmte Verbindung der Vorstellungen. Der Versuch, bemerkt Whewell treffend, in unserer Erfahrung eine andere Eigenthümlichkeit der Ursache als die der beständigen Folge ihrer Wirkung zu finden, ist vergebens. Aber ebenso vergebens ist es, Jemanden zu überreden, dass er die Vorstellung der Ursache nicht habe und den Glauben an eine Grundursache aller Dinge in ihm zu erschüttern. Wir können uns nicht einmal einbilden, dass Ereignisse ohne die Verknüpfung von Ursache und Wirkung vorgestellt werden könnten. Diese Verknüpfung ist nach Kants richtiger Bezeichnung eine Bedingung der Möglichkeit der Erfahrung. Alle Naturforscher stimmen in der Behauptung überein, dass nicht allein jede beobachtete Veränderung einer Bewegung eine Ursache gehabt habe, sondern auch, dass jede Veränderung einer Bewegung eine Ursache haben müsse. Ohne diese nothwendige Basis unserer Erkenntniss von diesem Gegenstande würde es gar keine naturphilosophischen Grundsätze über die Bewirkung von Bewegungen geben können.

Hume's psychologische Untersuchungen über die Gesetze der Association sind für die Franzosen und Engländer die Grundlage ihrer Theorie der Inductionen geworden. Auf sie haben die grossen Mathematiker Frankreichs, Condorcet, Laplace, Lacroix und Poisson, ihre Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet, welche nach ihrer Ansicht die Rechnung des gesunden Menschenverstandes ist, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluss von Hoffnung, Furcht und allen Gemüthsbewegungen auf unser Urtheil vernichtet und somit Vorurtheil und Aberglaube aus dem Urtheil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne. Zufolge der Begründung dieser Lehre wollen jene Lehrer alle Inductionen

nur als empirische nachweisen, welche ohne alle Erkenntnisse *a priori* gelten sollen. Dagegen wissen wir, dass jede in den Naturwissenschaften taugliche Induction eine rationelle sein müsse und dass eine solche nicht durch die Erwartung ähnlicher Fälle, sondern durch die *a priori* erkennbaren Gesetze der Geometrie und mathematischen Naturphilosophie geleitet werde. Es ist bemerkenswerth, dass Laplace den Widerstreit zwischen den Grundsätzen seiner Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seiner Mechanik des Himmels nicht gewahr geworden ist. Jede Bestimmung der Naturgesetze durch die Erfahrung hat nur einen grössern oder geringern Grad der Wahrscheinlickeit. Nun gesteht aber Laplace selbst zu, dass wir um die Nothwendigkeit der Naturgesetze mit vollständiger Gewissheit wissen. Zu dieser Einsicht können wir aber nicht durch die Empfindung gelangen.

Ausser dem durch Bacon, Locke und Hume sanctionirten Vorurtheil für den Empirismus hat zu dieser unrichtigen Theorie der Induction noch das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* zu den philosophischen methodischen Grundbestimmungen eine besondere Veranlassung gegeben.

Wahrscheinlichkeit *a posteriori* findet da statt, wo die Theilung einer Sphäre in ihre gleichmöglichen Fälle nicht *a priori* gegeben ist, sondern erst durch die Beobachtung bestimmt werden soll. Hier bin ich über die objectiv gleichmöglichen Fälle in völliger Unwissenheit und ich weiss nur, dass hinlängliche Vervielfältigung der Beobachtungen zu einer Durchschnittszahl mittlerer Wahrscheinlichkeit des Verhältnisses der Theile zu einander im Ganzen führen werde. Dies ist es, was Poisson das Gesetz der grossen Zahlen genannt hat. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung soll uns hier die Beobachtungen ordnen lehren, um solche Naturgesetze zu errathen, bei denen viele der Rechnung nicht zu unterwerfende Ursachen auf eine im Einzelnen sehr veränderliche Weise den Erfolg bestimmen, aber im Ganzen doch innerhalb bestimmter Schranken gleichmässig fortwirken. Dahin gehören z. B. Geburten, Heirathen, Sterbefälle, Wetterveränderungen und dergleichen mehr. Zu einer objectiven Bestimmung eines Natur-

gesetzes kann jedoch diese Rechnungsart nicht führen. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* kann nur die Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der Erfolge annäherungsweise feststellen, aber von da bis zu dem nothwendigen Naturgesetz und dem Grunde der Erscheinung ist noch ein weiter Schritt. Der Verlauf der Ereignisse in der Natur steht unter nothwendigen Gesetzen. Sind nun diese in einem gewissen Gebiet zur Zeit noch unbekannt, so geben die Durchschnittszahlen sehr lange fortgesetzter Beobachtungen zwar die richtigen Verhältnisse dieser Erfolge, zeigen aber noch nicht das Gesetz selbst; oder mathematisch ausgedrückt: die Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt uns hier nur erkennen, ob eine Grösse eine Function von einer andern ist, ohne die Form dieser Function selbst bestimmen zu können.

Laplace dagegen stellt die Sache so dar, als ob aus dem Zufall die Regelmässigkeit (das Gesetz) bei häufiger Wiederholung der Ereignisse hervorginge. Dies ist geradezu falsch. Denn die Regelmässigkeit ist umgekehrt schon vor dem Zufall bestimmt durch die Anzahl der unabhängigen Elemente, in deren Combinationen der Zufall spielt. Die Regelmässigkeit ist um so einfacher, je geringer diese Zahl der Elemente. Die gegenseitigen Möglichkeiten der einfachen Erscheinungen erzeugen nicht die Regelmässigkeit, sondern sind gerade die Folge des Gesetzes, nach dem die unabhängigen Elemente der Combination zusammenkommen. Der ganze Erfolg der Rechnung besteht hier nur darin, dass wir durch weit fortgesetzte Beobachtungen die Verhältnisse des Ganzen finden können. So wie Duvillard dafür ein vortreffliches Beispiel giebt. Er beweist (*Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité p.* 10) aus den Sterbelisten von Genf, Haag und Berlin, dass die Kinderblattern für Menschen über 30 Jahre alt um so weniger gefährlich werden, in je höherem Alter man sie zum erstenmal bekommt. Dies Ergebniss war ganz gegen die gemeine Meinung, aber es ist leicht fasslich, wie sich diese entgegengesetzte Meinung bilden musste. Ein solcher Unglücksfall musste weit allgemeinere Aufmerksamkeit erregen, theils weil der Verstorbene schon für die Gesellschaft von

Wichtigkeit war, theils nur durch das Ungewöhnliche, ihn einem Unglück erliegen zu sehen, dem in der Regel nur die Kindheit ausgesetzt ist. So wirken diese Fälle auf die Einbildungskraft der Beobachter; Gemüthsbewegungen, nicht Thatsachen bestimmen das Urtheil. Eben diese Einwirkungen werden noch weit stärker, da wo lebhafte Interessen und Leidenschaften ins Spiel kommen. Von diesen irrthümlichen Einwirkungen nun soll uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* befreien.

Das richtige Verhältniss der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Induction lässt sich vielleicht durch folgende Betrachtung deutlich machen. Die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung beruht überhaupt auf dem, was man Zufall nennt. Zufall ist der Nothwendigkeit entgegengesetzt. Es ist aber offenbar ein Unterschied, ob etwas zufällig ist oder uns zufällig zu sein scheint. Im erstern Falle giebt es kein Gesetz, von dem der Wechsel der Ereignisse abhinge, im letztern wissen wir nur nicht, ob es ein solches giebt oder nicht. Der erstere Fall bestimmt das Gebiet der Wahrscheinlichkeit *a priori*. Da, wo diese Wahrscheinlichkeit vorkommt, giebt es unter einem Gesetz einen Spielraum von Möglichkeiten und die Grösse dieses Spielraums (die Sphäre der Möglichkeiten) hängt ab von der Anzahl der unabhängigen Elemente, die in verschiedener Ordnung zusammentreten können. Der Zusammentritt dieser Elemente muss sich der Zahl und Art nach offenbar nach den Regeln der Combinationsrechnung bestimmen lassen. Ein Schema für ein solches Spiel zufälliger Ereignisse unter einem bestimmten Gesetz bietet das Würfelspiel. Der andere Fall bestimmt das Gebiet der Wahrscheinlichkeit *a posteriori*. Hier stehen wir einem Wechsel von Ereignissen gegenüber, von dem wir noch nicht wissen, ob darin eine Regelmässigkeit waltet und ob er von einem Gesetz regiert wird. Hier müssen wir aus der Zahl und Art der Combinationen, die wir zwischen den variabeln Elementen beobachten, die Regelmässigkeit und das Vorhandensein eines Gesetzes, von dem dieselbe abhängt, erst erschliessen. Aber wenn ich nun auch weiss, dass das anscheinend zufällige Spiel der Er-

eignisse der Nothwendigkeit eines Gesetzes gehorcht — und nur bis zu diesem Punkte kann uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* führen — so kenne ich darum doch dieses Gesetz selbst noch nicht und es wird nun erst eine Aufgabe der Induction, dasselbe zu suchen. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* ist also noch keine Induction selbst, sondern sie geht derselben vorher; sie giebt uns in zweifelhaften Fällen nur Aufschluss darüber, ob eine inductorische Aufgabe wirklich vorliegt oder nicht. In einem solchen Sinne hat sie in der That Laplace in seinen physisch-astronomischen Forschungen auch nur angewendet.

Ist nun das zu suchende Naturgesetz, wie in den meisten Fällen, irgend ein Causalgesetz, so darf man die Ursache der beobachteten Veränderung nicht beliebig annehmen oder nach Wahrscheinlichkeiten bestimmen, sondern man muss den Zusammenhang zwischen Ursach und Wirkung inductorisch erforschen, entweder dadurch dass man mit Ursachen experimentirt, oder dadurch, dass man die Natur der Wirkung durch Beobachtung und Rechnung (oder Construction) enthüllt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entscheidet also hier wieder nicht. Die Wahrscheinlichkeit der Verbindung zweier Ereignisse ist noch nicht das Gesetz dieser Verbindung. Ist das letztere erst bekannt, so kann man mit vollständiger Gewissheit sagen, ob zwei Dinge sich wie Ursache und Wirkung zu einander verhalten oder nicht. Früher glaubte man allgemein, dass der Mondwechsel das Wetter ändere. Dieser Glaube ist jetzt wenigstens aus der Wissenschaft verschwunden und wodurch? Nicht durch Abzählungen beobachteter Fälle, sondern dadurch, dass man zu der Einsicht gelangt ist, dass alle meteorologischen Veränderungen periodische Functionen der Windesdrehung sind. Zu einer mathematischen Theorie der Erscheinungen führen aber die Inductionen erst dann, wenn es denselben gelingt, die Form der Function zu bestimmen und die unabhängige Veränderliche derselben zu messen. Dies ist in der Astronomie der Fall. Die Function selbst zu bestimmen, sei es aus ihren Eigenschaften oder aus ihrem Differential oder aus ihrer Relation zu dem Differential-

quotienten einer andern Function, ist keine Aufgabe der Combinations- und Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern eine Aufgabe der Geometrie und Analysis. In der Natur hat man meist eine stetige Reihe von Wirkungen einer veränderlichen Ursache vor sich, wie z. B. bei der Bewegung der Himmelskörper die Figur der Bahn. Will man da das Gesetz der Veränderlichkeit und Wirksamkeit dieser Ursache erforschen (wie z. B. in der Astronomie das Gesetz der Anziehungskraft der Sonne), so muss man mit Hilfe der höheren Analysis einen Ausdruck für die augenblickliche Wirkung dieser Ursache suchen. Die Intensität einer Kraft ist gleich ihrer augenblicklichen Wirkung dividirt durch das Element der Zeit, während dessen sie diese Wirkung hervorbringt. Wie aber die augenblickliche Wirkung von Stelle zu Stelle der Bahn wechselt, lässt sich aus der Figur der krummen Linie d. i. aus der Gleichung der Bahn erkennen. Also auch das Gesetz der Veränderung der Intensität der anziehenden Kraft während des Umlaufs des Körpers in seiner Bahn. So hat Laplace selbst in dem klassischen ersten Kapitel des zweiten Buchs seiner Mechanik des Himmels durch eine an Klarheit, Einfachheit und Eleganz unübertreffliche Analyse das Gravitationsgesetz aus den drei Gesetzen Kepplers und der Mondbewegung inductorisch entwickelt.

Kant, der grosse Reformator der philosophischen Wissenschaften, löste den Humeschen Zweifel und wiess die metaphysischen Grundsätze, welche aus dem mathematischen Schematismus der Kategorien entspringen, als die Principien der Möglichkeit der Erfahrung nach. Damit war eigentlich die feste Basis für eine richtige Theorie der Inductionen gewonnen. Denn einerseits wurde dadurch die noch von Laplace discutirte Frage über den Ursprung der von Newton an die Spitze seiner Naturphilosophie gestellten *Leges* beantwortet. Ihr metaphysischer Ursprung war festgestellt. Andererseits war vor dem Richterstuhle der Kritik der Vernunft der Empirismus mit dem Rationalismus versöhnt, die falschen und übertriebenen Ansprüche beider aber abgewiesen worden. Es liessen sich nun die wahren logischen Regeln einer Architektonik der

Wissenschaften aufstellen. Aber die Lösung dieser Aufgabe verunglückte ihm auf eine höchst merkwürdige Weise.

Es gehört zweierlei hierher: aus seiner Logik die Lehre von der Induction, und aus seiner Kritik der reinen Vernunft die Lehre von dem regulativen Gebrauch der Ideen.

In seiner logischen Lehre von der Induction begeht Kant einen doppelten Fehler. Einmal setzt er an die Stelle des disjunctiven Vernunftschlusses den hypothetischen Schluss aus disjunctiver Regel und zweitens bezeichnet er die Induction und Analogie als Schlüsse der Urtheilskraft und setzt sie so als unvollständige Schlüsse den Verstandesschlüssen und Vernunftschlüssen an die Seite. Dadurch geht die Unterscheidung der philosophischen von der mathematischen Wahrscheinlichkeit, die für die Theorie der Induction unentbehrlich ist, verloren. Die Form der vollständigen Induction, die der wahre disjunctive Vernunftschluss ist, hat er ganz übersehen. Die meisten seiner Nachfolger haben diese Fehler wiederholt.

In der Kritik der reinen Vernunft bringt er als Anhang zur transcendentalen Dialektik noch einen besondern Abschnitt: Ueber den regulativen Gebrauch der Ideen der reinen Vernunft. Seine Ansicht geht hier etwa auf folgende Sätze zusammen:

Das Geschäft der Vernunft besteht darin, der Erkenntniss systematische Einheit d. i. Zusammenhang aus einem Princip zu geben. Diese Vernunfteinheit setzt jederzeit eine Idee voraus, nämlich die von der Form eines Ganzen der Erkenntniss, welches vor der bestimmten Erkenntniss der Theile vorhergeht und die Bedingungen enthält, jedem Theile seine Stelle und Verhältniss zu den übrigen *a priori* zu bestimmen. Idee ist eine die Erfahrung übersteigende Vorstellung. Nicht die Idee an sich selbst, sondern bloss ihr Gebrauch kann in Ansehung der gesammten möglichen Erfahrung entweder überfliegend (transcendent) oder einheimisch (immanent) sein, nachdem man sie entweder geradezu auf einen ihr vermeintlich entsprechenden Gegenstand, oder nur auf den Verstandesgebrauch überhaupt, in Ansehung der Gegenstände, mit welchen er zu thun hat, richtet. Die transcendentalen Ideen

(d. i. die Ideen von Seele, Freiheit und Gottheit) sind von immanentem Gebrauch. Der Verstand vereinigt das Mannigfaltige im Object durch Begriffe, die Vernunft vereinigt das Mannigfaltige der Begriffe durch Ideen, indem sie eine gewisse collective Einheit zum Ziel der Verstandeshandlungen setzt, welche sonst nur mit der distributiven Einheit beschäftigt sind. Wie geschieht nun diese Vereinigung der Begriffe zu einer collectiven Einheit durch Ideen? Wenn das Allgemeine, aus welchem das Besondere abgeleitet werden soll, nicht an sich gewiss und gegeben ist, so wird es nur problematisch angenommen und ist eine blosse Idee. Es wird also alsdann eine Idee als problematischer Begriff zum Grunde gelegt, und dem Verstande da, wo er durch Regeln nicht weiter fortkommt, durch Ideen fortgeholfen. Die Idee ist ein Schema einer gewissen systematischen Einheit. Die logische Einheit ist nämlich an sich unbestimmt, wenn ihr nicht ein Schema oder ein Analogon eines solchen Schema gegeben wird. Die Idee der Vernunft (z. B. die der Seele oder die der Gottheit) ist nun ein Analogon von einem Schema der Sinnlichkeit (d. i ein Analogon des mathematischen Schemas der Kategorien). Daraus entspringen subjective Grundsätze der Vernunft, die nichts über die Beschaffenheit des Objects aussagen, sondern nur von dem Interesse unserer Vernunft, die Erkenntniss dieses Objects zur grösstmöglichen Vollkommenheit zu erheben, hergenommen sind. Solche Grundsätze heissen Maximen der Vernunft. Es ist eine nothwendige Maxime der Vernunft, nach den Ideen zu verfahren z. B. den Gegenstand der Erfahrung (die Natur) so zu betrachten, als ob er von dem eingebildeten Gegenstande der Idee der Gottheit als seinem Grunde oder Ursache abgeleitet werden könne. Dies ist eine bloss „relative Supposition der Urtheilskraft.“ Es soll nicht von einer höchsten Intelligenz die Weltordnung und systematische Einheit der Welt wirklich abgeleitet, sondern es soll nur von der Idee einer höchstweisen Ursache die Regel hergenommen werden, nach welcher die Vernunft bei der Verknüpfung der Ursachen und Wirkungen in der Welt zu ihrer eigenen Befriedigung am besten zu brauchen sei. Wenn ich mir ein Wesen

als existirend denke, dass einer blossen und zwar transcendentalen Idee correspondirt, so ist dieses transcendentale Ding bloss das Schema eines regulativen Princips, wodurch die Vernunft, so viel an ihr ist, systematische Einheit über alle Erfahrung verbreitet. Die Annahme eines göttlichen Wesens giebt mir zwar keinen Begriff von der innern Möglichkeit seiner höchsten Vollkommenheit noch der Nothwendigkeit seines Daseins, aber sie genügt doch allen Fragen, die das Zufällige betreffen, wodurch das systematische Interesse der Vernunft vollständig befriedigt wird. Die höchste formale Einheit, welche allein auf Vernunftbegriffen beruht, ist die zweckmässige Einheit der Dinge. Ein solches Princip eröffnet also unserer auf das Feld der Erfahrung angewandten Vernunft ganz neue Aussichten, es macht nothwendig, alle Anordnung in der Welt so anzusehen, als ob sie aus der Absicht einer allerhöchsten Vernunft entsprungen wäre d. h. sie stellt eine Zweckgesetzgebung über die blosse Mechanik der Natur.

Der Fehler, den Kant in dieser Lehre vom regulativen Gebrauch der Ideen des Absoluten begeht, ist ein sehr complicirter. Sein ganzes Raisonnement beruht eigentlich auf folgenden von ihm selbst angegebenen Sätzen: 1) Vernunfteinheit ist nur durch Ideen möglich (d. i. durch die transcendentalen Ideen von Seele, Freiheit und Gottheit) und 2) Vernunfteinheit ist die Einheit des Systems. Daraus folgert er, dass zur Vollendung der systematischen Einheit der Wissenschaft die Vernunftideen von Seele, Freiheit und Gottheit nothwendig seien, und da sie nun als Erklärungsgründe d. i. als constitutive Principien in den Wissenschaften nicht vorkommen, so weist er ihnen einen bloss regulativen Gebrauch an. Man kann sich die Verwechselung, die hier zu Grunde liegt, so verdeutlichen. „Die Idee von der Form eines Ganzen der Erkenntniss, welches vor der bestimmten Erkenntniss der Theile vorhergeht und die Bedingungen enthält, jedem Theile seine Stelle und Verhältniss zu den übrigen *a priori* zu bestimmen" ist nichts anderes als das logische Ideal einer Architektonik der Wissenschaften. Diese bloss logische Idee der

vollständigen systematischen Einheit aller menschlichen Wissenschaft ist aber offenbar etwas ganz anderes als die metaphysischen Ideen der Seele, der Freiheit und der Gottheit. Menschen können sich allerdings die absolute Vollendung im Wesen der Dinge nur nach den Ideen von Seele und Freiheit und unter der Idee der Gottheit vorstellen. Aber diese Vorstellungen führen uns über die Grenze aller menschlichen Wissenschaft hinaus. Die vollendete Einheit des Ganzen unserer Erkenntniss liegt also in der That in den Ideen des Absoluten, aber eben darum jenseits aller Wissenschaft.

Kant stellt dagegen die Sache so dar, als ob die Idee der Gottheit der Grund jeder systematischen Einheit sei. Die Gottheit ist wohl objectiv der Grund der systematischen Einheit der Welt, aber nicht das subjective Princip der systematischen Einheit meiner Erkenntniss. Die Idee der Gottheit ist zur Einheit der systematischen Form der Wissenschaft durchaus nicht erforderlich. Die Wissenschaft würde nicht nur nichts gewinnen, sondern eine Beute des Grundsatzes „der faulen Vernunft" werden, wenn man, anstatt nach Gesetzen zu forschen, nur auf die unerforschlichen Rathschlüsse der Gottheit sich berufen wollte. Kant verwechselt also hier die objective Vernunfteinheit mit der bloss subjectiven Vernunfteinheit d. h. er verwechselt die objective Einheit im Wesen der Dinge mit der bloss logischen Einheit unserer Erkenntniss; die Vollendung der erstern, welche wir uns durch die transcendentalen Ideen der Vernunft vorzustellen genöthigt sind, mit der Vollständigkeit der letztern in der Theorie, welche durch die Induction zu Stande kommt. Mit einem Worte, er verwechselt das logische Ideal der Architektonik menschlicher Wissenschaft mit dem, was Fries die transcendentale Apperception nennt.

Wenn Kant sagt, die Idee der Vernunft sei das Schema eines regulativen Begriffs, so ist die Frage, welches ist dieser Begriff? Er nennt als solche die Principien der Homogeneität, der Specification und der Continuität der Formen. Dies sind logische Principien der Classification unserer Begriffe. Das erste ist die Maxime der reinen Vernunft, das

zweite die Maxime des Sinnes und das dritte die Maxime der Vereinigung beider zur Einheit der Erkenntniss, angewandt auf die Classification der Begriffe. Sie entsprechen den im 7. Abschnitt angegebenen allgemeinsten formalen Regulativen der Einheit, der Mannigfaltigkeit und der Wissenschaft, aber sie haben mit den Ideen der Einheit des denkenden Wesens, der Einheit des Weltganzen und der Einheit der höchsten Weltursache nichts zu schaffen. Die Ideen des Absoluten haben überhaupt mit der wissenschaftlichen Erkenntniss gar nichts zu theilen, sondern sie setzen gerade dem wissenschaftlich erkennbaren Wesen der Dinge als dem Endlichen das Ewige entgegen. Sie sind die Principien des Glaubens, aber in der Wissenschaft von gar keinem, also auch nicht von regulativem Gebrauch. Wäre die Idee nichts weiter als das Schema eines regulativen Begriffs, so wäre einerseits die Idee des Absoluten nichts als eine methodische Vorschrift des Verfahrens, aber keine metaphysische Grundvorstellung, andererseits aber wäre eine Theorie (d. i. theoretische Wissenschaft) unmöglich, denn aus Ideen giebt es keine Theorie.

Kant fasst gleich anfangs den Kern seiner Ansichten über diesen Gegenstand in folgenden Worten zusammen. ,,Ich behaupte, sagt er: die transcendentalen Ideen sind niemals von constitutivem Gebrauche, so, dass dadurch Begriffe gewisser Gegenstände gegeben würden, und in dem Falle, dass man sie so versteht, sind es bloss vernünftelnde (dialektische) Begriffe. Dagegen aber haben sie einen vortrefflichen und unentbehrlich nothwendigen regulativen Gebrauch, nämlich den Verstand zu einem gewissen Ziele zu richten, in Aussicht auf welches die Richtungslinien aller seiner Regeln in einen Punkt zusammenlaufen, der, ob er zwar nur eine Idee (*focus imaginarius*), d. i. ein Punkt ist, aus welchem die Verstandesbegriffe wirklich nicht ausgehen, indem er ganz ausserhalb den Grenzen möglicher Erfahrung liegt, dennoch dazu dient, ihnen die grösste Einheit neben der grössten Ausbreitung zu verschaffen. Nun entspringt uns zwar hieraus die Täuschung, als wenn diese Richtungslinien von einem Gegenstande selbst, der ausser dem Felde empirisch möglicher Erfahrung läge, ausgeschossen

wären (sowie die Objecte hinter der Spiegelfläche gesehen werden), allein diese Illusion, welche man doch hindern kann, dass sie nicht betrügt, ist gleichwohl unentbehrlich nothwendig, wenn wir ausser den Gegenständen, die uns vor Augen sind, auch diejenigen zugleich sehen wollen, die weit davon uns im Rücken liegen, d. i. wenn wir in unserm Falle den Verstand über jede gegebene Erfahrung (dem Theile der gesammten möglichen Erfahrung) hinaus, mithin auch zur grösstmöglichen und äussersten Erweiterung, abrichten wollen."

Das Gleichniss, durch welches Kant hier seine Vorstellungsweise zu illustriren sucht, hat in der That etwas Täuschendes. Die Inductionen führen uns zu dem Verborgenen der Natur, indem sie uns indirect das zu erkennen geben, was wir direct nicht wahrnehmen können, und die heuristischen Maximen der Urtheilskraft, durch welche unsere Inductionen geleitet werden, sind gewissermassen der Spiegelfläche vergleichbar, die das, was hinter unsern Rücken liegt (das Verborgene der Natur) sichtbar macht. Aber das Bild hinter der Spiegelfläche ist ja das Abbild eines wirklichen Gegenstandes vor derselben und der *focus imaginarius* ist nichts, als die Stelle, an der das Spiegelbild zu stehen scheint. Von hier an wird das Kant'sche Gleichniss nach zwei Seiten hin falsch. Erstens nicht der blosse *focus imaginarius*, der leere Ort, sondern das daselbst stehende Spiegelbild verursacht den Schein eines Gegenstandes und zweitens ist der Gegenstand, den man vermittelst des Spiegels sieht, kein solcher, der gänzlich ausser dem Bereich der Spiegelung läge, das heisst in unserm Falle, es ist kein transcendentaler, sondern ein empirischer Gegenstand; es ist keine Idee, sondern eine Naturursache oder ein Naturgesetz, was wir in diesem Spiegel erblicken. So spielt die Verwechselung eines leeren logischen mit einem gehaltvollen transcendentalen Princip selbst in dieses Gleichniss hinein und die Folge davon ist die, dass die transcendentalen Ideen der Vernunft an die Stelle der heuristischen Maximen der Urtheilskraft treten. Die Vollständigkeit der systematischen Einheit der Wissenschaften besteht nämlich in der Theorie und diese kann nur durch Inductionen zu Stande

kommen. Die Führer und Leiter der Inductionen sind aber die heuristischen Maximen der Urtheilskraft. Verwechselt man nun mit Kant die Vollendung der Theorie mit der Erkenntniss der absoluten nothwendigen Einheit im Wesen der Dinge nach den Ideen, so erscheinen die letztern als die Bedingungen der Möglichkeit der vollständigen wissenschaftlichen systematischen Einheit oder der Theorie d. i. sie stellen sich als die Regulative der Inductionen dar.*)

Wir wissen, dass dem Naturforscher in der That die Principien der mathematischen Naturphilosophie die leitenden Maximen seiner Inductionen sind. Wollte man aber wie Kant die transcendentalen Ideen an deren Stelle treten lassen, so würde die mechanische Naturwissenschaft in Teleologie verwandelt oder wenigstens, wie es Kant wollte, die Mechanik der Natur einer Technik der Natur untergeordnet. Dies letztere ist ein Irrthum nicht seiner Dialektik, sondern seiner Weltansicht. Er sieht das teleologische Princip der Organologie fälschlich wie ein transcendentales an, da es doch nur den empirischen Inductionen der pragmatischen Weltansicht gehört. Es ist kein religionsphilosophisches, sondern ein methodisches Princip der beobachtenden Naturwissenschaft. Der religiösen Ueberzeugung entspricht nicht die teleologische, sondern nur die ästhetische Auffassung der Zweckmässigkeit der Natur.**)

Durch die Verwechselung der transcendentalen Ideen der Vernunft mit den heuristischen Maximen der Urtheilskraft hat sich Kant einerseits seine Ideenlehre, andererseits seine Lehre von der Induction verdorben, und wir glauben mit Fug und Recht dies als eins der entscheidenden Momente mit bezeichnen zu dürfen, wodurch die Philosophie nach Kant auf ihre Irrwege gerathen ist. In Folge dieser Verirrungen der Speculation ist es geschehen, dass das Band zwischen der Philo-

---

*) Ich verweise über diesen Gegenstand auf meine Epochen der Geschichte der Menschheit. Bd. 2. S. 287—338.

**) Siehe hierüber a. a. O. S. 104—138.

sophie und den Naturwissenschaften immer mehr zerrissen und die erstere in eine ziemlich isolirte Stellung gekommen ist.

Unter den Nachfolgern Kants ist, wie uns dünkt, Fries der Einzige, welcher die Fehler der Kant'schen Speculation verbessert und die Philosophie wahrhaft weiter gebildet hat. Nach den Grundzügen seiner Lehre habe ich hier die Theorie der Induction auszuführen versucht.

In neuerer Zeit haben auch englische Gelehrte die Philosophie der Inductionen bearbeitet. Die Früchte dieser Arbeiten sind zwei grössere Werke: John Stuart Mill's inductive Logik deutsch von Schiel und *Whewell's Philosophy of the inductive Sciences.* Auch hat John Herschel sich in seinem *Discourse on the Study of natural Philosophy* sowie in dem *Quarterly Review for June* 1841 über den Gegenstand verbreitet.

John Mill's inductive Logik ist im Sinne des strengsten Empirismus entworfen und ausgeführt. Er begreift nicht den Unterschied zwischen zufälligen und nothwendigen Wahrheiten, und um für seinen Empirismus freies Feld zu gewinnen, beginnt er mit einer Bestreitung der Lehre von den nothwendigen Wahrheiten. Er setzt mit Hume voraus, nur durch lange Gewohnheit erhielten die zufälligen Wahrheiten den Schein von Nothwendigkeit. Ein nothwendiges Urtheil wäre also darnach ein solches, bei dem wir uns an die Association von Subject und Prädicat gewöhnt hätten.

„Wir gelangen, sagt er (S. VIII), zu den Wahrheiten auf zweierlei Wegen: einige erkennen wir direct und für sich allein, andere dagegen erkennen wir nur durch Hilfe anderer Wahrheiten. Die erstern sind Gegenstände der Anschauung oder des Bewusstseins, die letztern der Folgerung. Die durch Anschauung erlangten Wahrheiten sind die ursprünglichen Prämissen, aus welchen wir alle andern folgern. Es ist keine Erkenntniss durch Schliessen möglich, wenn uns ein jedes diesem Schliessen vorausgehende Wissen fehlt."

In dieser Distinction liegt schon der Grundirrthum des Verfassers verborgen. Unter den „Gegenständen der Anschauung oder des Bewusstseins" befinden sich nämlich auch

Wahrheiten *a priori* wie die geometrischen und metaphysischen Grundsätze. Mag man nun auch mit Hume die objective Giltigkeit der letztern bestreiten, so kann man doch die Wahrheit der erstern nicht in Zweifel ziehn. Die Axiome der Geometrie entspringen aber nicht aus der Sinnesanschauung, sondern aus einer reinen Anschauung *a priori*. Dies übersicht Mill und beschränkt alle Anschauung auf die empirische Anschauung der Sinne. Hätte er darin Recht, so würde jeder Syllogismus d. h. nach seinem Sprachgebrauch jeder Schluss vom Allgemeinen aufs Besondere eine *Petitio principii* sein. Zu so ungereimten Folgerungen gelangt man, wenn man von falschen Voraussetzungen ausgeht.

Durch jenen Fehler, den er bei der Beobachtung seiner Erkenntniss begeht, gelangt er dann zu dem Resultat: „Induction ist das Fundament aller Wissenschaften, sogar der deductiven oder demonstrativen. Sogar jeder geometrische Schluss ist eine Art Induction. Die Mathematik ist nicht unabhängig von dem Beweis durch Erfahrung und Beobachtung.“

Selbst Hume hat die Nothwendigkeit und Apodikticität der mathematischen Wahrheiten nicht anzutasten gewagt. Der Irrthum, in dem er sich mit seinen Vorgängern befand, bestand nur darin, dass er ohne Weiteres voraussetzte, diese Wahrheiten folgen aus dem Grundsatze des Widerspruchs d. h. er betrachtete die mathematischen Urtheile als analytische, während sie doch in der That synthetische Urtheile *a priori* sind. Mill dagegen glaubt noch einen Schritt weiter als selbst Hume gehen zu müssen, indem er den mathematischen Wahrheiten einen empirischen Charakter beilegt und behauptet, die Axiome der Geometrie hätten ihren Ursprung in der Erfahrung. Diese Meinung verdient mehr ihrer Sonderbarkeit als ihres Scharfsinns wegen einer Erwähnung.

Er erklärt die Apodikticität der mathematischen Erkenntniss für eine Illusion und zwar aus keinem andern Grunde, als „weil jene Wahrheiten sich nur auf imaginäre Gegenstände beziehen.“ Der letztere Ausdruck, der den Grund seiner Behauptung enthält, ist offenbar falsch. Jene Wahrheiten bezie-

hen sich auf abstracte, aber nicht auf imaginäre Gegenstände. Eine Abstraction ist aber keine Imagination. Die letztere mag man immerhin für eine Illusion erklären, aber mit der erstern hat es eine andere Bewandniss: sie ist eine abgesonderte Theilvorstellung unserer Erkenntniss.

Auch beweist der Geometer nicht, wie Mill sagt, aus Definitionen, vielmehr muss er, wenn er einen Begriff definirt hat, erst die Realität dieses Begriffes durch Construction darthun und erst aus dieser Construction, aber nicht aus dem blossen Begriff, entspringen die Behauptungen, die der Geometer zu seinen Schlüssen nöthig hat. Der Geometer zieht seine Begriffe nicht, wie Mill behauptet, empirisch aus der Erfahrung, sondern er bildet sich dieselben *a priori* durch Determination und giebt dann durch Construction, also wiederum *a priori* ohne die Erfahrung zu befragen, jedem solchen Begriffe einen Gegenstand, der ihm entspricht. So bildet sich der Geometer z. B. den Begriff einer incommensurabeln Grösse als einer solchen, die durch keinen, wenn auch noch so kleinen aliquoten Theil der Einheit ohne Rest ausgemessen werden kann und beweist dann, dass die Diagonale des Quadrats ein solcher Gegenstand ist, der diesem Begriffe entspricht.

Wie unsicher Mill in seinen Behauptungen ist, geht schon daraus hervor, dass er bald sagt: die Geometrie schliesse aus blossen Begriffen; bald: sie schliesse nicht aus Axiomen, sondern aus Hypothesen und die Voraussetzungen dieser Wissenschaft seien so weit entfernt nothwendig zu sein, dass sie nicht einmal wahr seien; bald wiederum: diese Hypothesen (d. i. diese aus der Luft gegriffenen Behauptungen) seien Generalisationen aus der Beobachtung und wurzelten in dem Boden der Erfahrung.

Um die nothwendigen Wahrheiten zu beseitigen, bildet sich Mill einen Begriff von nothwendiger Wahrheit, der nicht nur willkürlich, sondern obendrein falsch ist. Wir verstehen unter n o t h w e n d i g dasjenige, was so sein muss, wie es ist und nicht anders sein kann. Eine nothwendige Wahrheit ist daher diejenige, deren Gegentheil u n m ö g l i c h ist. Anstatt dessen erklärt sie Mill für eine solche, deren Gegentheil

unbegreiflich sei. „Nothwendige Wahrheiten, sagter, sind Sätze, deren Negation unbegreiflich ist oder die wir uns nicht als falsch vorstellen können" und meint dann, dass „diese Unbegreiflichkeit etwas Zufälliges sei, das nicht im Phänomen selbst liege, sondern in der geistigen Geschichte desjenigen, der es zu begreifen suche." Als Copernicus zuerst lehrte, dass die Erde eine jährliche Bewegung um die Sonne habe, so war das damals allerdings gegen die Gewohnheit zu urtheilen und mochte wohl auch Manchem seiner Zeitgenossen unbegreiflich vorkommen. Aber das Gegentheil der Behauptung: zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich, widerspricht nicht einer langen und festgewurzelten Gewohnheit zu urtheilen, sondern der Anschauung, die ich *a priori* von dem Raume habe, der sich zwischen irgend welchen zwei Punkten befindet. Der Grund dieser Wahrheit und ihrer Nothwendigkeit liegt nicht in den Gewöhnungen der Association, sondern in der Anschauung des Raumes, welche keine Sinnesanschauung, sondern eine reine Anschauung *a priori* ist. Dort war die Unbegreiflichkeit allerdings nur relativ und zufällig, sie lag in der früheren Unwissenheit. Hier dagegen ist die Unbegreiflichkeit des Gegentheils nothwendig, weil dieses Gegentheil selbst unmöglich ist; der dort zufällige Grund der Unwissenheit findet hier gar nicht statt. Hinter Mills „zufälliger Unbegreiflichkeit" steckt also die Unwissenheit und nichts weiter.

Ebenso schwankend und unbestimmt ist das, was er über die Induction sagt. S. LI sagt er: die Induction sei eine wirkliche Folgerung von Thatsachen aus Thatsachen. Seite 5 dagegen erklärt er die Induction für „die Operation, durch welche man allgemeine Urtheile (Sätze) entdeckt und beweist. Es ist wahr, fährt er fort, das Verfahren, wodurch wir einzelne Thatsachen erforschen, ist ebenso inductiv, als das, durch welches wir zu allgemeinen Wahrheiten gelangen." Seite 10 erklärt er wiederum die Induction als „das Verfahren, wonach wir schliessen, dass, was von gewissen Individuen einer Classe wahr ist, auch für die ganze Classe wahr ist, oder dass was zu gewissen Zeiten wahr ist, unter ähnlichen Um-

ständen zu allen Zeiten wahr sein wird.“ Seite 11 schliesst er ganz willkürlich die vollständige Induction aus und beschränkt die Bedeutung dieses Wortes nur auf die unvollständige, „denn zu einer Induction gehöre, dass von bekannten Thatsachen auf unbekannte geschlossen werde.“ Endlich Seite 25 lehrt er: die Induction bestehe darin, dass man schliesst, eine Erscheinung, die bei einzelnen Gelegenheiten stattgefunden hat, wird bei allen Gelegenheiten einer gewissen Classe stattfinden, nämlich in allen, welche den vorhergehenden in dem, was man die wesentlichen Umstände nennt, gleichen.

Hier macht er das Gesetz der Erwartung ähnlicher Fälle zum Princip der Inductionen. Höchst inconsequent erkennt er aber sogleich darauf an, dass diesem Gesetz die Voraussetzung einer allgemeinen Gesetzmässigkeit der Natur wie ein „Axiom“ zu Grunde liege. Den Ausdruck: der Gang der Natur ist gleichförmig, welchen er gebraucht, erklärt er nämlich selbst für gleichbedeutend mit dem: das Weltall ist beherrscht durch allgemeine Gesetze. Wenn er aber diese Gleichförmigkeit in dem Gange der Natur zuerst für den Grund der Induction und dann wiederum für eine Folge der Induction erklärt, so ist dies ein offenbarer Widerspruch. Wenn in der That die Verknüpfung der Ursachen mit ihren Wirkungen nur auf der Gewohnheit der Erwartung ähnlicher Fälle beruhte, so würden wir den Eintritt eines künftigen Ereignisses nur mit einem grössern oder geringern Grade der Wahrscheinlichkeit, aber nie mit vollständiger Gewissheit bestimmen können. Wie fest sich auch durch die Gewohnheit unsere Associationen gebildet haben mögen, so ist dieses Band doch nicht unzertrennlich. Aber es wird unzertrennlich, so wie ein Naturgesetz an die Stelle der Erwartung ähnlicher Fälle tritt. Die Astrologen glaubten auch die Ursachen mit ihren Wirkungen zu verknüpfen, wenn sie den Stand und die Aspecten der Gestirne zur Geburtsstunde eines Menschen auf seine künftigen Lebensschicksale bezogen, aber diese Beziehung erwies sich als eine trügerische, nachdem das Gesetz der Gravitation, das Naturgesetz der gegenseitigen Einwirkung der Himmelskörper

auf einander, bekannt war. Ueberhaupt würde die grosse Aufgabe der Naturforschung, die Aufgabe der Aufsuchung und Entdeckung von Naturgesetzen, gar nicht existiren, wenn sich die Beziehung der Wirkungen auf ihre Ursachen schon durch die blind wirkende Macht der Gewohnheit richtig bildete. Aber etwas anderes ist es, Beständigkeit der Ereignisse erwarten, etwas anderes ein Gesetz suchen, das den Wechsel der Ereignisse regiert. Das erstere ist eine Sache der Gewohnheit oder der Wahrscheinlichkeit *a posteriori*, das letztere eine Sache der Induction. Die von Mill behauptete Identität des logischen Verfahrens, durch welches wir einzelne Thatsachen beweisen, mit demjenigen, durch welches allgemeine Wahrheiten gefunden werden, ist gar nicht vorhanden. Der Planet Neptun ist nicht inductorisch gefunden worden, sondern auf dem Wege der Demonstration aus dem Gravitationsgesetz. Wenn Mill (S. 8) die Berechnung der Entfernung des Mondes als ein Beispiel für Induction anführt, so zeigt er, dass er von Induction keinen Begriff hat. Wenn man ein gegebenes Dreieck oder Viereck trigonometrisch auflöst, so macht man keine Induction, und wenn man die Bestimmungsstücke dieses Dreiecks oder Vierecks durch Messung sucht, so ist dies auch noch keine Induction. Die Induction schliesst nicht „von Thatsachen auf Thatsachen," sondern von Thatsachen aufs Gesetz.

Mill wirft die Frage auf (S. 31) wie es komme, dass wir in einigen Fällen mit der unfehlbarsten Zuversicht auf Gleichförmigkeit rechnen, und in andern wieder gar nicht darauf rechnen können? Warum, frägt er, ist in manchen Fällen ein einziges Beispiel zu einer vollständigen (?) Induction hinreichend, während ein andermal Myriaden übereinstimmender Fälle ohne eine einzige bekannte oder vermuthete Ausnahme einen so kleinen Schritt zur Festsetzung eines allgemeinen Satzes zu thun, nicht gestatten? Und er fügt hinzu: „wer diese Frage beantworten kann, versteht mehr von der Philosophie der Logik als der erste Weise des Alterthums, er hätte das grosse Problem der Inductionen gelöst. Die Antwort auf diese angeblich so schwierige Frage dünkt uns ungemein einfach. Der Grund liegt darin, dass ich in dem einen Falle

nach einem Gesetz, in dem andern Falle bloss nach der Gewohnheit der Erwartung ähnlicher Fälle urtheile, dass ich in dem einen Falle eine rationelle, durch heuristische Maximen der Urtheilskraft geleitete, Induction, in dem andern Falle dagegen eine bloss empirische Induction *per enumerationem simplicem* mache.

Höchst wunderbar endlich ist die Vorstellung, die sich Mill von der logischen Form der Induction zu machen scheint. Er behauptet nämlich, jede Induction sei ein Syllogismus, dessen obere Prämisse fehle. Unter Syllogismus versteht er aber nichts anderes als den kategorischen Schluss. Jede Induction wäre also ein kategorischer Schluss ohne Obersatz. Die letzte obere Prämisse aller Inductionen soll dann in dem Grundsatze liegen, dass der Gang der Natur gleichförmig sei. Dies letztere ist nur ein unbeholfener Ausdruck für den metaphysischen Grundsatz der allgemeinen Naturgesetzmässigkeit. Dieser Grundsatz ist nach seiner Meinung „die obere Prämisse für alle Inductionen und verhalte sich daher zu allen solchen Schlüssen wie der Obersatz zum Schlusssatz.“ Dies ist offenbar grundfalsch. Die Voraussetzung der allgemeinen Gesetzmässigkeit der Natur ist die leitende Maxime, aber nicht der Obersatz der Inductionen. Der Grund dieses Irrthums liegt in der gänzlichen Verkennung der Natur des disjunctiven Vernunftschlusses. Nach einem Ausdrucke, den John Mill einmal gebraucht (S. 24. 25) bestünde das Wesen der Induction darin, irgend ein Prädicat eines Subjects, das nur stückweise beobachtet werden kann, anzugeben. Hier ist der Ausdruck: Prädicat unbestimmt und birgt in seiner Unbestimmtheit den ganzen Irrthum schon in sich, weil zwischen dem kategorischen und disjunctiven Urtheil nicht unterschieden wird. Nicht ein Prädicat (d. i. ein Merkmal eines Gegenstandes) wird stückweise beobachtet, sondern die Theile eines Ganzen und die Induction sucht daraus die Form des Ganzen zu errathen. Diese kann entweder eine mathematische der Zusammensetzung oder eine dynamische der Verknüpfung und Wechselwirkung sein. Eine Form der erstern Art ist z. B. die Figur der Planetenbahnen, eine Form der Wechselwirkung

dagegen ist z. B. das Gesetz der Gravitation, welches das Triebwerk des Planetensystems beherrscht und regelt, oder das noch unbekannte Gesetz der sogenannten Lebenskraft, wonach sich das organische Gebild gestaltet und erhält. Ein Gesetz der erstern Art wird durch eine kategorische, ein Gesetz der letztern Art durch eine hypothetische Induction gefunden. Diesen Unterschied scheint Mill gar nicht zu kennen und die Inductionen der erstern Art scheinen aus seiner Logik ganz ausgeschlossen zu sein.

Wenn ein Mann wie Mill, der von der Chemie zur Logik sich wendet, durch einen rohen philosophischen Empirismus sich täuschen lässt, so ist das wohl begreiflich, aber wundern kann man sich, wie ein Geist von Sir John Herschels Gepräge, der die Tiefen der Mathematik und Astronomie durchdrungen hat, einem Philosophem huldigen kann, das mit den mathematischen Principien der Naturphilosophie Newtons so wenig im Einklang steht. Denn Niemand anders als Herschel ist die grosse Autorität, auf die sich John Mill stützt, um die Lehre von den nothwendigen Wahrheiten zu widerlegen und den empirischen Ursprung der Geometrie zu erhärten. Zwischen Herschel und Whewell war die Controverse zuerst entstanden. Der Erstere hatte in der Beurtheilung der *History and Philosophy of the Inductive Sciences* des Letztern besonders die Lehre angefochten, dass die Anschauung des Raumes der Grund der nothwendigen Wahrheiten der Geometrie ist *(that the Idea of Space is the ground of the necessary truths of geometry)* und dagegen behauptet, diese Wahrheiten seien aus der Erfahrung abgeleitet. Die Ruhe und Gründlichkeit, mit welcher Whewell auf eine so artige und edle Weise die Einwürfe seines Freundes beantwortet hat, *) lässt nichts weiter zu sagen übrig und ich beschränke mich hier darauf, nur den Kern seiner Bemerkungen herauszuschälen. Um die Nothwendigkeit und Allgemeingiltigkeit *(universality* im Gegensatze von *gene-*

---

*) *Remarks on a Review of the Philosophy of the inductive Sciences. A Letter to Sir John Herschel* in der *Philos. of ind. Scienc. Vol. II p.* 669 *etc.*

rality) der geometrischen Wahrheiten zu erklären, ist Herschel genöthigt zu „einem unwiderstehlichen Antrieb des Geistes ins Unendliche zu verallgemeinern (*to generalize ad infinitum*),“ zu „einer unwillkührlichen Anwendung des Gesetzes der Stetigkeit“ seine Zuflucht zu nehmen. Er muss also neben der Erfahrung noch ein anderes Princip der Apodiktieität und Universalität der geometrischen Wahrheiten annehmen und zwar ein gewisses Gesetz der Selbstthätigkeit des Geistes im Erkennen der Welt. Ohne ein solches wäre die Generalisation *ad infinitum*, der Uebergang von dem was wir beobachten zu dem was wir nicht beobachten, nicht möglich. Unter diesem Ausdruck — Gesetz der Selbstthätigkeit des Geistes (*the law of the mind's activity*) — lassen sich beide einander entgegengesetzte Ansichten umfassen. Aber Whewell hat den Vortheil, dass er dieses Princip, welches bei Herschel unbestimmt bleibt, in der Anschauung des Raumes aufweisen und die Nothwendigkeit und Allgemeinheit der geometrischen Wahrheiten durch ihren Ursprung aus einer nothwendigen und ursprünglichen Grundvorstellung unseres Geistes (*which element I have termed an Idea*) erklären kann, während Herschel sich ausserdem noch in Widerspruch mit sich selbst verwickelt, indem er die geometrischen Wahrheiten einerseits auf die Selbstthätigkeit des Geistes gründet, welche der bloss passiven Function des Geistes, die die Eindrücke der Sinne aufnimmt, entgegengesetzt ist, andererseits sie aber von Erfahrung und Beobachtung abhängig erklärt.

Wir können auch noch bemerken, dass Herschel als Naturforscher sich selbst nicht an seine philosophischen Grundsätze bindet. So wendet er z. B. bei seiner schönen Untersuchung über die Bahnen der Doppelsterne, ganz gegen den Geist seiner empirischen Philosophie, die sogenannte Methode der Curven an, um durch Geometrie die Beobachtungen nicht bloss zu vervollständigen, sondern auch zu corrigiren. Diese Methode besteht in einer graphischen Darstellung der Beobachtungen. Gesetzt, man hätte durch eine Reihe von Beobachtungen eine Parthie von Punkten bestimmt, deren graphische Aufzeichnung eine Irregularität der Lage zeigt, so zieht man

„mit kühner, aber vorsichtiger Hand" eine Curve, die, wenn auch nicht durch die gegebenen Punkte, doch so nahe wie möglich, zwischen denselben läuft, und befreit dadurch, dass man die mathematische Regelmässigkeit, durch die alle Beobachtungen zusammenhängen, sichtbar macht, die einzelnen Beobachtungen von ihren Beobachtungsfehlern. In der That geben die directen Beobachtungen die Positionswinkel bei den Doppelsternen nicht so genau wie die durch eine solche Curve verbesserten Beobachtungen. „Eine solche Curve, sagt Herschel selbst, stellt das Gesetz der Veränderung des Positionswinkels mit der Zeit nicht bloss für die Zwischenzeiten der Beobachtung, sondern für die Momente der Beobachtung selbst genauer dar, als es die einzelnen rohen Beobachtungen thun können. Es ist dabei nur erforderlich ein oder zwei Fälle aufzusuchen, wo die Substituirung der Curve für die Punkte Genüge thut und wir haben damit eine grössere Annäherung an die Natur und eine Elimination der Beobachtungsfehler in einem grossen Maassstabe erreicht. Dies ist offenbar einer von den Fällen, in welchen die Geometrie und nicht die Erfahrung der Natur das Gesetz giebt.

Je weniger wir uns mit den philosophischen Ansichten von Herschel und Mill einverstanden erklären können, desto mehr fühlen wir uns gedrungen, den Arbeiten Whewells auf diesem Gebiete die gerechte Anerkennung zu zollen. Das grosse und umfangreiche Werk *The Philosophy of the Inductive Sciences, founded upon the History of the Physical Sciences, in two Volumes. II. Edition, London, Parker* 1847. verbreitet sich über das ganze Gebiet der Naturwissenschaften und dessen Zusammenhang mit der Philosophie, und ist, wie der Verfasser selbst sagt, in der Absicht geschrieben, den Plan von Bacon's *Novum Organon* auf den gegenwärtigen Zustand der physikalischen Wissenschaften anzuwenden. Der Bau (*the construction*) dieser Wissenschaften, den Bacon erst ahnete, steht jetzt aufgeführt da und kann zu einem Gegenstande der Betrachtung und Untersuchung gemacht werden. Aus der Untersuchung der Structur der verschiedenen Zweige der Naturwissenschaft die philosophischen Principien, welche allen

diesen gemeinsam sind, sowie die Methoden der Erfindung und Entdeckung abzuleiten, ist die grosse Aufgabe des Verfassers. Wir haben hier nur die philosophischen Grundlagen dieses Werkes zu besprechen.

Whewell ist der erste Engländer, der in die Geheimnisse der Kantischen Philosophie tiefer eingedrungen ist. Während seine Vorgänger von Bacon bis auf Herschel die Gleichartigkeit aller menschlichen Erkenntnisse voraussetzen und die Induction als den einzigen Weg zu den allgemeinen Wahrheiten und den Principien bezeichnen, hat er die Ungleichartigkeit und Verschiedenartigkeit der menschlichen Erkenntnissweisen, den wesentlichen Unterschied zwischen den zufälligen und nothwendigen Wahrheiten, richtig erkannt und begriffen, dass die ersteren aus dem Sinn, die letzteren aus reiner Vernunft, eine jede derselben also aus einer andern Quelle entspringen. Wenn wir auch die Wahl seiner Kunstausdrücke nicht durchgängig billigen können, so müssen wir doch die Sicherheit und Selbstständigkeit bewundern, womit er sich dieses Grundgedankens der Kritik der reinen Vernunft bemächtigt hat, so wie die Klarheit und Ruhe, womit er diese Lehre von dem Unterschied der Erkenntnisse *a priori* und *a posteriori* darzulegen und zu entwickeln versteht.

Er lehrt vollkommen richtig, der Grund der nothwendigen Wahrheiten liegt in gewissen ursprünglichen Grundvorstellungen des menschlichen Geistes, *Fundamental Ideas*, wie er sie nennt. So ist die Vorstellung oder die Anschauung des Raumes, welche wir haben, der Grund der geometrischen Wahrheiten. *The Axioms of Geometry*, sagt er Vol. I. p. 66, *express the necessary conditions which result from the Idea of Space.* Er hat den Unterschied zwischen Definition und Axiom, oder, um es in Kantischer Sprache auszudrücken, den Unterschied zwischen analytischem Urtheil und synthetischem Urtheil *a priori* richtig erkannt und angewendet. So sagt er Vol. I. p. 56, um diesen Unterschied zwischen den nothwendigen Wahrheiten und den analytischen Urtheilen (*identical propositions*) klar zu machen: die Definition von Fünf ist nicht

Drei und Zwei, sondern Vier und Eins, und in völliger Uebereinstimmung mit dem von Kant selbst in seinen Prolegomenen gewählten Beispiel zur Veranschaulichung der synthetischen Natur der geometrischen Axiome sagt er p. 71: *When we declare that "a straight line is the shortest distance between two points," is this merely an identical proposition? the definition of a straight line in another form? Not so: the definition of a straight line involves the notion of form only, and does not contain anything about magnitude; consequently, it cannot contain anything equivalent to "shortest."*

Er lehrt ferner ganz richtig, dass die Einheit der menschlichen Erkenntniss in der Verbindung der zufälligen mit den nothwendigen Wahrheiten, in der Unterordnung der Thatsachen unter das Gesetz bestehe. „Ohne Gesetz haben die Thatsachen keine Verbindung und keinen Zusammenhang, ohne Thatsachen hat das Gesetz keine Realität. Erst in der Verbindung beider besteht die Erkenntniss." (S. 54. Vol. I.) „Die Erfahrung und Beobachtung allein kann kein innerliches Band zeigen, welches das Zukünftige mit dem Vergangenen, das Mögliche mit dem Wirklichen verknüpft." (S. 64.) „Erst die ursprünglichen Grundvorstellungen unsers Geistes (*the Fundamental Ideas*) enthalten und bringen die Regeln der nothwendigen Verknüpfung dessen, was uns die Sinne zeigen." (S. 66.)

Ueber diese Grundvorstellungen und ihr Verhältniss zur Erkenntniss sagt er p. 8: *The special and characteristic property of all the Fundamental Ideas is what I have already mentioned, that they are the mental sources of necessary and universal scientific truths. I call them Ideas, as being something not derived from sensation, but governing sensation, and consequently, giving form to our experience; — Fundamental, as being the foundation of Knowledge, or at least of Science. And the way in which those Ideas become the foundation of Science is, that when they are clearly and distinctly entertained in the mind, they give rise to inevitable convictions or intuitions, which may be expressed as Axioms; and these Axioms are the foundation of Sciences respective of each Idea.*

The Idea of Space, when clearly possessed, give rise to geometrical Axioms, and is thus the foundation of the Science of Geometry. The Idea of Mechanical Force, (a modification of the Idea of Cause) when clearly developed in the mind, gives birth to Axioms which are the foundation of Science of Mechanics.

Endlich verdient noch seine klare und scharfe Auffassung der Kantischen Lehre von der reinen Anschauung des Raumes angeführt zu werden. *It must be observed,* sagt er p. 89, *that we do not deny, but distinctly assert, the existence of space as a real and necessary condition of all objects perceived; and that we not only allow that objects are seen external to us, but we found upon the fact of their being so seen, our view of the nature of space. If, howewer, it be said that we deny the reality of space as an object or thing, this is true. Nor does it appear easy to maintain that space exists as a thing, when it is considered that this thing is infinite in all its dimensions; and, moreover, that it is a thing, which, being nothing in itself, exists only that other things may exist in it. And those who maintain the real existence*) of space, must also maintain the real existence of time in the same sense. Now two infinite things, thus really existing, and yet existing only as other things exist in them, are notion so extravagant that we are driven to some other mode of explaining the state of matter.*

Thus space is not an o b j e c t *of which we perceive the properties, but a* f o r m *of our perception; not a thing which affects our senses, but an idea to which we conform the impressions of sense. And its peculiarities appear to depend upon this, that it is not only a form of sensation, but of* i n t u i t i o n; *that in reference to space we not only perceive but* c o n t e m p l a t e *objects.*

The term i n t u i t i o n *(in its rigorous sense) is applicable only to that mode of contemplation in which we thus look at objects as made up of parts, and apprehend the relations of*

*) d. h. die Wesenheit.

those parts at the same time and by the same act by which we apprehend the objects themselves.

Ueber den Lichtseiten dürfen aber auch die Schattenseiten nicht übersehen werden. Diese finde ich hauptsächlich in dem Mangel einer logischen Theorie der Induction. Denn obschon Whewell die Induction als das Band zwischen den zufälligen und nothwendigen Wahrheiten, zwischen den Thatsachen und dem Gesetz anerkennt, so sieht er sich am Schluss seines Werkes doch genöthigt zu bekennen: *The Logic of Induction has not yet been constructed* (Vol. II. p. 616). Er setzt stillschweigend voraus, der kategorische Schluss sei die einzige Form des Vernunftschlusses. In diesem Sinne behauptet er (Vol. I. p. 70), die Geometrie entwickele sich bloss aus ihren Definitionen und Axiomen, und es werde in den geometrischen Schlüssen keine neue Wahrheit eingeführt, die nicht schon in jenen liege. Hier müssen wir bestimmt widersprechen. Es wird allerdings in dem Untersatz eines geometrischen Schlusses eine neue Wahrheit aus der Anschauung des Raumes eingeführt und Whewell's Behauptung beruht offenbar auf der Verwechselung der hypothetischen Schlussart mit der kategorischen. Und ebenso wenig wie der hypothetische existirt in seiner Logik der disjunctive Vernunftschluss. Bei dieser Unkunde der Form des disjunctiven Schlusses ist dann freilich eine Logik der Induction unmöglich. Die nächste Folge von diesem Mangel ist eine doppelte Verwechselung.

Whewell verwechselt nämlich die Induction ebensowohl mit der Abstraction wie mit der Hypothese. Wenn er Deduction und Induction einander entgegensetzt wie progressive und regressive Methode (Vol. I. p. 21), so ist dieser Gegensatz viel zu unbestimmt. Denn unter dem Ausdruck „Deduction" umfasst er zweierlei ganz Verschiedenartiges: Theorie und Demonstration. Die regressive Methode ist ferner gleichfalls eine doppelte, die der Induction und die der Abstraction oder Speculation. Die erstere läuft in Schlüssen, die andere in Zergliederungen rückwärts.

Ohnerachtet dieses Mangels einer allgemeinen logischen Theorie der Inductionen wirft er dennoch einzelne über-

raschende Lichtblicke auf das inductive Verfahren. Er erklärt (Vol. II. p. 48) die Induction für den Schluss von einer Anzahl von Fällen auf eine allgemeine Regel (*general propositions*), und fährt fort: „In einigen Fällen resultirt der allgemeine Satz aus einer blossen Nebeneinanderstellung der Fälle, aus einer blossen Verbindung und Ausdehnung derselben. In den hervorstechendsten Fällen aber sind die Thatsachen nicht bloss zusammengebracht, sondern es ist zu ihrer Verbindung ein neues Element eingeführt. Dies ist ein in den allgemeinen Satz eingeführter Begriff des Verstandes, der in keiner der beobachteten Thatsachen angetroffen wird. Die Thatsachen sind bekannt, aber sie sind noch isolirt und unverbunden bis der Entdecker zu dem blossen Aggregat der *Data* noch ein Princip der Verbindung (*Principle of Connexion*) hinzubringt. Die Perlen sind da, aber sie hängen nicht eher zusammen als bis man sie mit einer Schnur versieht. Dieser allgemeine Begriff ist nicht durch die Erscheinungen, sondern durch den Verstand gegeben. Der Schlusssatz ist nicht in den Prämissen enthalten, sondern schliesst sie zufolge der Einführung einer neuen Verallgemeinerung ein."

Dies ist offenbar der Unterschied zwischen empirischer und rationeller Induction. Aber so vortrefflich er diesen Unterschied auseinandersetzt, so wenig weiss er ihn zu benutzen. Er fühlt die Wichtigkeit der Sache, aber er weiss sie nicht auf Regeln zu bringen, da ihm die logische Form der Induction unbekannt ist. „Wenn dieser Begriff (des Verstandes d. h. Begriff *a priori*) einmal eingeführt ist, so erscheint er als untrennbar verknüpft mit den Thatsachen, als nothwendig in dieselben verstrickt. Dieser Schritt der Induction, welcher in der *Invention of a new Conception* besteht, ist bis jetzt allgemein übersehen und von den früheren Philosophen sogar in Abrede gestellt worden."

Dabei entsteht die Frage, welche Whewell selbst aufwirft, wie und wodurch gelangt man zur Entdeckung und Auffindung dieses Begriffs (von dem wir bereits gesehen haben, dass es der Oberbegriff ist, der neu in die Induction eingeführt wird)? Darauf würden wir antworten: *The Invention of the*

Conception macht sich vermittelst der heuristischen Maximen der Urtheilskraft. So gab z. B. dem Bradley die Stellung der Windfahne auf einem segelnden Boot die leitende Idee für die Erklärung der Erscheinungen der Aberration aus der Zusammensetzung zweier Bewegungen: der des Lichts und der der Erde um die Sonne. Jene Richtung der Windfahne war für Bradley, um mich des Kantischen Gleichnisses zu bedienen, das Bild im Spiegel, welches den verborgenen Grund der Erscheinung reflectirte. Es rief in ihm die Idee der Zusammensetzung der Bewegung des Lichts mit der der Erde hervor.

Whewell dagegen meint, die Aufsuchung jenes Begriffs (des Oberbegriffs der Induction) sei eine blosse Sache der Vermuthung, ein Werk der Hypothese. „Verschiedene Voraussetzungen (*Suppositions*), sagt er, müssen gemacht werden bis die rechte getroffen ist. Allerlei Möglichkeiten müssen ausgedacht und die passende daraus ausgewählt werden. Der Entdecker muss ingeniös und fruchtbar in der Auffindung von Hypothesen sein, welche die Phänomene der Natur verbinden, fleissig und sorgfältig in Vergleichung derselben mit den Thatsachen, bereitwillig, sie aufzugeben, wenn sie nicht mit dem Laufe der Natur harmoniren."

Diese Ansicht hat er sich offenbar aus einer mangelhaften Analyse des von Keppler bei der Entdeckung der wahren Figur der Marsbahn angewendeten Verfahrens gebildet.

Die Probe für die Richtigkeit der Hypothese (*Test of hypothesis*) liegt dann, wie er sagt, darin, dass sie nicht bloss die Phänomene erklärt, auf die sie zunächst angepasst ist, sondern auch andere, die man bei ihrer Auswahl gar nicht im Auge hatte. So war das Gravitationsgesetz zunächst nur aus Keppler's Gesetzen erschlossen, aber es liessen sich daraus auch die Störungen, die Gestalt der Himmelskörper, Ebbe und Fluth u. s. w. erklären.

Wir können hier bemerken, dass Whewell das Verhältniss der leitenden Maximen zu den Inductionen nicht kennt. Jene Supposition darf nicht willkürlich, sondern sie muss nach einer Regel geschehen und diese Regel ist in der leitenden Maxime enthalten. Die Frage wäre hier gewesen: wo ist denn

die Quelle jener Conceptionen und Suppositionen? Aber auf diese Frage ist Whewell nicht näher eingegangen. Die Folge davon ist die, dass er kein Kriterion des Unterschieds zwischen der blossen Hypothese und der Induction besitzt. So gebraucht er, um, wie er sich ausdrückt, das stufenweise Aufsteigen durch Hypothesen zur Wahrheit beim inductiven Verfahren zu veranschaulichen, folgendes Beispiel. Die Finsternisse ereignen sich in einem mysteriösen Wirrwarr. Der Begriff eines Cykels bringt Licht in dieses Dunkel. Der Epicykel bringt Ordnung in die Verwirrung der Planetenbewegung. Der Begriff der Ellipse endlich hebt die Unordnung wieder auf, in welche die Epicykeln gerathen waren. Dagegen haben wir zu erinnern, der Unterschied zwischen der elliptischen und der epicyklischen Theorie der Planetenbewegung ist, logisch betrachtet, kein gradueller, sondern ein specifischer. Die erstere ruht auf einer wirklichen Induction, die letztere auf einer blossen Hypothese. Die erstere zeigt, was in der Natur wirklich stattfindet, die letztere begnügt sich schon mit einer mathematischen Fiction.

Whewell scheint eine Ahnung von den heuristischen Maximen der Urtheilskraft und ihrem Zusammenhange mit dem disjunctiven Vernunftschluss gehabt zu haben. „Wenn der leitende Gedanke für eine neue Theorie einmal gefunden ist, sagt er, so ändern alle Phänomene ihren Anblick." „Solche Untersuchungen beginnen im Zwielicht und enden im vollen Tagesglanze." Es gehören nach seiner Meinung zweierlei Dinge zu einer Induction: *the Explication of the Conception* und *the Colligation of observed Facts*. Was er mit der Erklärung des Begriffes will, gehört eigentlich in das Kapitel von den leitenden Maximen. Es liegt dies auf der Seite der mathematischen Naturphilosophie und nicht auf der Seite der Empirie. Aber es ist nicht, wie Whewell glaubt, eine logische Definition, sondern ein mathematischer oder mechanischer Satz. Dieser bestimmt die Richtung der Forschung, welche auf einem bestimmten Gebiete einzuschlagen ist.

Whewell unterscheidet sehr treffend zwischen *Laws of Phænomena* und *Laws of Causes*, zwischen formeller und

physischer Theorie, und knüpft daran die Frage: welche Ursachen sind zulässig? Diese Frage wird in der That durch die mathematische Naturphilosophie beantwortet, aber Whewell hat keine Antwort auf diese Frage, weil er das Verhältniss der mathematischen Naturphilosophie zu den Inductionen nicht mit in Untersuchung genommen hat.

Noch einen Punkt hat Whewell am Schluss seines Werkes (*Book* XIII) mit grosser Ausführlichkeit, obwohl ebenso wenig erschöpfend, behandelt: das Verhältniss der Induction zur Mathematik. Die Grundzüge seiner Ansicht über diesen Gegenstand lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

Wenn die Thatsachen aufgelöst und die Phänomene gemessen worden sind, so versucht der Naturforscher durch Combination derselben auf allgemeine Gesetze zu kommen (*to combine them into general laws*). Diese Colligation der Thatsachen, welche zu allgemeinen Sätzen führt, besteht aus drei Schritten: 1) *the Selection of the Idea*, 2) *the Construction of the Conception* und 3) *the Determination of the Magnitude*. Z. B. die Mondbewegung kann in eine Reihe von Theilbewegungen oder Ungleichheiten aufgelöst werden und von einer jeden solchen Ungleichheit müssen wir wissen, wovon sie direct abhängt, ob von dem Fortschritt der Zeit allein oder von der Configuration der Himmelskörper im Raume, dann haben wir ihr Gesetz (*law*) zu suchen, und endlich ihren Betrag zu bestimmen. Hier heisst das Grundelement (*fundamental element*), von dem die Ungleichheit abhängt, das A r g u m e n t. Mathematisch lassen sich diese drei Schritte bezeichnen als 1) *Selection of the Independent Variable*, 2) *the Construction of the Formula* und 3) *the Determination of the Coefficients*.

Diese hier genannten Begriffe lassen sich folgendermassen tabellarisch zusammenstellen:

Idea	*Conception*	*Magnitude*
Argument	*the Law*	*the Amount of the change*
Independent Variable	*Formula*	*Coefficients.*

An diesen von Whewell gegebenen Ueberblick über die hierher gehörigen Begriffe will ich zum S c h l u s s d e s G a n z e n noch einige Betrachtungen anknüpfen über

13. Das Verhältniss der Induction zur Mathematik.

Wir haben gefunden, dass der Oberbegriff der Induction entweder empirisch d. i. durch Experiment oder Beobachtung, oder mathematisch d. i. durch Construction oder Rechnung gesucht werden müsse. Whewell behauptet daher mit vollem Rechte, dass der allgemeine Satz, welcher die einzelnen Thatsachen miteinander verbindet, nicht die einfache Summe dieser Thatsachen, sondern etwas mehr ist. Das nämlich, was zur Allheit der Theile noch hinzukommt, ist die Form des Ganzen. Diese ist die Schnur des Zusammenhangs der einzelnen Perlen. Diese Form des Ganzen ist nun entweder eine mathematische Form der Zusammensetzung oder eine dynamische Form der Verknüpfung oder der Wechselwirkung. In jedem Falle muss man dieselbe mathematisch zu entdecken suchen. Aber der Weg, der in dem einem oder dem andern Falle zu ihrer Entdeckung führt, ist sehr verschieden. In dem letztern Falle ist die Aufgabe, aus dem Bereich der einen Function in das Bereich der andern überzugehen, von dem Gesetz oder der Figur der Bahn auf das Gesetz der Kraft zu kommen. Dies geschieht vermittelst eines Grenzüberganges, also durch Differentialrechnung. So kann man z. B. aus dem ersten Kapitel des zweiten Buches von Laplace's Mechanik des Himmels ersehen, wie man vermittelst der Operation der Grenzbestimmung von der Polargleichung der Ellipse unter Zuziehung des ersten Kepplerschen Gesetzes auf das Gravitationsgesetz, also von einer Functionsform auf eine andere Functionsform kommt. In dem erstern Falle dagegen ist die Aufgabe: die Natur der Function aus gegebenen speciellen Werthen derselben zu bestimmen oder geometrisch ausgedrückt: die krumme Linie zu ziehen, welche durch eine Anzahl gegebener Punkte geht. Dies giebt eine Induction unter kategorischer Form, jenes führt auf eine Induction unter hypothetischer Form.

Beide Wege mussten erst entdeckt und gebahnt sein, bevor die Induction mathematisch geleitet werden konnte. Daher kommt es, dass die wahrhaft inductorische Methode der Naturforschung erst so spät in der Geschichte der Wissenschaft

auftaucht. Das Eine, der Uebergang aus dem Bereich der einen in das einer andern Function, war nicht möglich vor der Erfindung der höhern Analysis. Von dem Andern, der Bestimmung einer Function aus ihren speciellen Werthen, hat Keppler das erste Beispiel gegeben. Er war es, der zuerst das Band zwischen der Mathematik und der Induction knüpfte.

Das erstere Verfahren folgt den Regeln eines mathematischen Calculs, aber bei dem andern Verfahren wird die Functionsform, oder das Gesetz nicht aus einem Theorem, sondern aus Beobachtungsgrössen abgeleitet. Die Wege, die hier zum Ziel führen, sind fast unter allen Umständen dornig und wildverwachsen; ihre Auffindung hing meist vom Zufall ab und ihre Kenntniss war bisher mehr ein Geheimniss der grossen Entdecker. Es schien mir darum der Mühe werth, diesem Gegenstande eine besondere Untersuchung zu widmen, deren Ergebnisse ich hier mittheile.

Die Aufgabe, die Natur oder die Form einer Function aus gegebenen speciellen Werthen derselben zu bestimmen, oder die Curve zu finden, welche durch eine Anzahl gegebener Punkte geht, ist an sich eine unbestimmte, weil durch die nämliche Anzahl gegebener Punkte ganz verschiedene krumme Linien gehen können. Diese Unbestimmtheit des Problems, die mathematisch gar nicht zu beseitigen ist, wird durch die Induction aufgehoben. Aus der Natur des besonderen Falls werden sich immer gewisse charakteristische Eigenschaften der Function zu erkennen geben, welche sich zur Entdeckung der Form derselben benutzen lassen. So wusste Keppler, als er die Figur der Planetenbahnen suchte, dass die Bahn, welche der Planet um die Sonne beschreibt, eine in sich zurückkehrende Curve ist, welche einen Mittelpunkt hat, er kannte den grössten Durchmesser derselben und in diesem den Abstand der Sonne vom Mittelpunkte der Bahn. Seine Aufgabe war nun folgende. Er hatte aus den Beobachtungen des Tycho de Brahe eine Anzahl Punkte oder Marsörter $O_1, O_2, O_3 \ldots\ldots O_n$, deren Lage durch die rechtwinkligen Coordinaten

$$x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots\ldots x_n, y_n$$

oder in Bezug auf Polarcoordinaten durch

$$v_1, r_1, v_2, r_2 \ldots\ldots v_n, r_n$$

gegeben war und er musste

$$y = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad r = f(v)$$

bestimmen d. i. die Form der Function oder die Rechnungsoperation, durch die sich r aus v ableiten lässt.

Die Schwierigkeit der Berechnung der wahren Anomalie aus der mittleren oder aus der Zeit nöthigte ihn, einen Hilfswinkel einzuführen und anstatt von der wahren von der excentrischen Anomalie auszugehen. Er konnte also die Werthe von v und r nicht unmittelbar und direct, sondern nur vermittelst der excentrischen Anomalie E mit einander vergleichen. Nun fand er zuerst, und zwar empirisch, das Gesetz für die Veränderung der Grösse des Radius Vector oder die Gleichung: $r = a\,(1 + e \cos E)$. Ein glücklicher Zufall leitete ihn zu dieser Entdeckung.*) Erst später fand er die Relation zwischen v und E oder das Gesetz für die Lage des Radius Vector, welches sich durch die Gleichung: $r \cos v = a\,(\cos E + e)$ ausdrücken lässt. Wenn man aus diesen beiden Gleichungen $\cos E$ eliminirt, so erhält man

$$\frac{r - a}{ae} = \frac{r}{a} \cos v - e$$

und daraus

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 - e \cos v}$$

die Polargleichung der Ellipse.

Die Marsbahn ist also eine Ellipse, deren Excentricität gleich dem Abstande der Sonne von dem Mittelpunkte der Bahn ist. Keppler macht jedoch keinen Gebrauch von der Polargleichung, sondern gründet die Construction der Rudolfinischen Tafeln auf die beiden Gleichungen

$$1)\quad r = a\,(1 + e \cos E)$$

$$2)\quad \cos v = \frac{\cos E + e}{1 + e \cos E}$$

Hier sind a und e (d. i. in Begriffen ausgedrückt: die Grösse und die Form der Ellipse) Elemente, E ist die

*) S. meine Epochen der Geschichte der Menschheit. Bd. I. S. 434.

unabhängige Veränderliche und sowohl v wie r sind berechnete Werthe der Functionen.

Von diesem Beispiele Keppler's lässt sich nun folgendes allgemeines Verfahren abstrahiren. Gesetzt es seien empirisch die beiden Zahlenreihen

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$$
$$y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_n$$

gegeben und man solle

$$y = f(x)$$

bestimmen. Das Gesetz dieser beiden Reihen sei unbekannt. Dagegen gebe es eine dritte Zahlenreihe

$$z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots z_n$$

deren Gesetz oder Gliederfolge entweder bekannt oder beliebig angenommen sei und es gelänge, durch Vergleichung der Werthe $z_1, z_2, z_3 \ldots, z_n$ mit $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ eine Relation zwischen y und z ausfindig zu machen d. i. $y = \varphi(z)$ zu bestimmen und andererseits in ähnlicher Weise $x = \psi(z)$, so würde sich auch $y = f(x)$ bestimmen lassen. Denn kennt man zwei Gleichungen von den Formen $x = \psi(z)$ und $y = \varphi(z)$, so liegt nur noch eine analytische Aufgabe vor, bei der es sich nur noch um die Elimination von z aus beiden Gleichungen handelt, wobei $y = f(x)$ von selbst übrig bleibt. Hier tritt die Induction immer zwischen die gegebene Reihe specieller Werthe und die noch unbekannte Functionsform.

Durch die Hilfsmittel, welche heut zu Tage die Mathematik darbietet, ist noch ein anderer Weg möglich, der direct auf die Polargleichung der Ellipse führt, der vielleicht weniger als jeder andere Zufälligkeiten ausgesetzt sein dürfte und deshalb wohl verdiente, zur Heeresstrasse umgewandelt zu werden.

Die Aufgabe, die Natur einer Function aus ihren speciellen Werthen zu bestimmen, ist, mathematisch genommen, nichts anderes, als das sogenannte Interpolationsproblem. Es käme also darauf an, vermittelst einer Interpolationsformel die Functionsform zu entdecken. Dies kann durch Combination der Interpolationsformel von Lagrange mit dem Theorem des Mac Laurin geschehen.

Nach dem Theorem des Mac Laurin ist

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1}x + \frac{f''(o)}{1.\,2.}x^2 + \frac{f'''(o)}{1.\,2.\,3.}x^3 + \ldots \textit{ in infinitum}$$

und im Allgemeinen ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \textit{ in inf.}$$

Bricht man die Reihe mit n Gliedern ab, so ist näherungsweise

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

d. h. jede Function kann approximativ als eine ganze rationale und algebraische betrachtet werden.

Kennt man nun die n zusammengehörigen Werthe $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_n y_n$, so wendet man die Interpolationsformel von Lagrange an. Nach vollständiger Ausführung der Rechnung erhält man ein Resultat von der Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}.$$

Um das Coefficientengesetz dieser Reihe zu entdecken, bilde man die Quotienten

$$\frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{a_3}{a_2}, \ldots.$$

weil diese dem Mac Laurinschen Satze zufolge

$$\tfrac{1}{1}\frac{f'(o)}{f(o)}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{f''(o)}{f'(o)}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{f'''(o)}{f''(o)}, \ldots..$$

sind, und mithin durch diese Bildung das Gesetz der Coefficienten am leichtesten sich entdecken lässt. Ist das Gesetz der Coefficientenbildung bekannt, so findet man endlich durch Summirung der Reihe die Function.

Wendet man dies auf den Kepplerschen Fall an, so handelt es sich darum, eine Gleichung zwischen r und v d. i. zwischen dem Radius Vector und der wahren Anomalie zu suchen. Um nun hier mit gleichartigen Grössen zu rechnen, setze man $\cos v = x$ und suche eine Gleichung zwischen r und x. Diese Annahme liegt zunächst, da nach der Natur der Polarcoordinaten der Cosinus an die Stelle der Abscissen tritt. Ginge es mit dem Cosinus nicht, so müsste man den Sinus oder die Tangenten versuchen.

Diesen Gedanken wollen wir nun für die Marsbahn und

zwar mit den Kepplerschen Elementen derselben ausführen. Nach der Interpolationsformel von Lagrange ist

$$r = \frac{(x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ \ldots\ (x - x_n)}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)}\,r_1$$

$$+ \frac{(x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ \ldots\ (x - x_n)}{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\,(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)}\,r_2$$

$$+ \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4)\ \ldots\ (x - x_n)}{(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_4)\ldots(x_3 - x_n)}\,r_3$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ \ldots\ (x - x_{n-1})}{(x_n = x_1)\,(x_n - x_2)\,(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})}\,r_n.$$

Nach Kepplers Messungen ist die mittlere Entfernung des Mars $a = 1{,}52350$, die grösste $= 1{,}66465$, die lineare Excentricität $ae = 0{,}14115$, also in Theilen der mittlern Entfernung des Mars d. i. $e = \frac{0{,}14115}{1{,}52350} = 0{,}09264850$, wofür wir $0{,}09265$ setzen.

Setzt man nun für x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 der grössern Deutlichkeit willen α, β, γ, δ, ε und führt die in der Interpolationsformel angedeuteten Multiplicationen aus, so ist für fünf Elementenpaare:

$$r =$$

$$\frac{x^4-(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\,x^3+(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)\,x^2-(\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)\,x+\beta\gamma\delta\varepsilon}{\alpha-\beta\,.\;\alpha-\gamma\,.\;\alpha-\delta\,.\;\alpha-\varepsilon\,.}\,.\,r_1$$

$$+\frac{x^4-(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)\,x^3+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta+\alpha\varepsilon+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)\,x^2-(\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)\,x+\alpha\gamma\delta\varepsilon}{\beta-\alpha\,.\;\beta-\gamma\,.\;\beta-\delta\,.\;\beta-\varepsilon}\,.\,r_2$$

$$+\frac{x^4-(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon)\,x^3+(\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\delta\varepsilon)\,x^2-(\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\delta\varepsilon)\,x+\alpha\beta\delta\varepsilon}{\gamma-\alpha\,.\;\gamma-\beta\,.\;\gamma-\delta\,.\;\gamma-\varepsilon}\,.\,r_3$$

$$+\frac{x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)\,x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon)\,x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\beta\gamma\varepsilon)\,x+\alpha\beta\gamma\varepsilon}{\delta-\alpha\,.\;\delta-\beta\,.\;\delta-\gamma\,.\;\delta-\varepsilon}\,.\,r_4$$

$$+\frac{x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta)\,x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)\,x+\alpha\beta\gamma\delta}{\varepsilon-\alpha\,.\;\varepsilon-\beta\,.\;\varepsilon-\gamma\,.\;\varepsilon-\delta}\,.\,r_5$$

Ich nehme nun als Data der Rechnung folgende 5 Elementenpaare:

E	v
0°, 0′, 0″	v_1 . . 0°, 0′, 0″
45°, 0′, 0″	v_2 . . 41°, 21′, 33″ 7/10
90°, 0′, 0″	v_3 . . 84°, 41′, 2″ 2/10
. . . .	v_4 . . 90°, 0′, 0″
180°, 0′, 0″	v_5 . . 180°, 0′, 0″

r	Log. r	x=cos v.	Log. x	*)
r_1.. 1,66465	0,2213230	1 . . . . . . α		
r_2.. 1,62331	0,2104014	0,75058 . . β	0,8753970—1	
r_3.. 1,52350.. a	0,1828425	0,09265 . . γ	0,9668454—2.	
r_4.. 1,51042.. p	0,1790985	0 . . . . . δ		
r_5.. 1,38235	0,1406181	—1 . . . . ε		

*) Der Parameter ist nicht genau 1,51042, sondern er liegt zwischen 1,51042 und 1,51043, sein Logarithmus also zwischen 0,1790977 und 0,1791006. Berechnet man ihn vermittelst der Gleichung $p=a\ (1-e^2)$ aus der Excentricität 0,09265 und dem Halbmesser 1,52350, so findet man seinen Logarithmus = 0,1790985, zu welchem die Zahl 1,5104227 gehört. Keppler hätte also zum Behuf dieser Rechnung die Messung der Radii Vectores um eine oder zwei Decimalstellen weiter treiben müssen, was aber über die Grenzen der Genauigkeit der Tychonischen Beobachtungen hinausgeht. Wir haben demnach in der Colonne der r zweierlei Zahlen, einmal solche, die mit der letzten Ziffer rund abgeschlossen sind und dann r_2 und r_4, die über die fünfte Decimalstelle hinausgehen. Diese letztern werfen gleichsam einen Schatten von sich, der sich im Logarithmus, dem Spiegelbilde der Zahl, mit abspiegeln muss. Vergleicht man unsre Zahlenangaben der Werthe von v mit denen der Rudolfinischen Tafeln, so wird man finden, dass die letzteren bisweilen um mehrere Secunden falsch sind. So geben die Rudolfinischen Tafeln für

$E = 30°,\ v = 27°\ 26'\ 37''$
$E = 45°,\ v = 41°\ 21'\ 37''$
$E = 90°,\ v = 84°\ 41'\ \ 3''$

Der Grund liegt wahrscheinlich in der Ungenauigkeit der Cosinustafeln, deren sich Keppler zu seinen Rechnungen bediente. Diese Zahlen haben uns, bis wir ihre Fehlerhaftigkeit gewahr wurden, lange Zeit irre geführt, denn 1 Secunde giebt in dieser Rechnung schon einen bemerkbaren Ausschlag. Um daher, was für den Zweck der Rechnung eine Nothwendigkeit war, mit Sicherheit in dem Zahlenkreise festzusammengehöriger Werthe zu bleiben, haben wir von den Kepplerschen Zahlen nur

den Halbmesser a = 1,52350
und die lineare Excentrität ae = 0,14115

Ferner hat man

	Log.
$1-\beta$ . . 0,24942	0,3969313—1
$1-\gamma$ . . 0,90735	0,9577748—1
$\beta-\gamma$ . . 0,65793	0,8181797—1
$1+\beta$ . . 1,75058	0,2431819.
$1+\gamma$ . . 1,09265	0,0384811.
$\beta+\gamma$ . . 0,84323	0,9259460—1.

Rechnet man mit diesen Grössen, so verschwindet wegen $\delta = 0$ das von x freie Glied in allen Reihen ausser der vierten und man erhält sofort

$$a_0 = \frac{1.\ 0{,}75058.\ 0{,}09265. -1.}{-1. -0{,}75058. -0{,}09265. +1} \ .\ 1{,}51042$$
$$= \quad 1{,}51042.$$

Setzt man ferner für die in allen Gliedern jeder Horizontalreihe wiederkehrenden Nenner der Reihe nach

$$0{,}24942\ .\ 0{,}90735\ .\ 2 \ = \ + N_1$$
$$-\ 0{,}24942\ .\ 0{,}65793\ .\ 0{,}75058\ .\ 1{,}75058 = -N_2$$
$$-\ 0{,}90735. -0{,}65793\ .\ 0{,}09265\ .\ 1{,}09265 = +N_3$$
$$-\ 1\ .\ -\ 0{,}75058\ .\ -\ 0{,}09265\ .\ 1 = -N_4$$
$$-\ 2\ .\ -\ 1{,}75058\ .\ -\ 1{,}09265\ .\ -\ 1 = +N_5$$

festgehalten und daraus die verschiedenen Werthe von r, v und x berechnet, dann aber unter der hier zulässigen Annahme gerechnet, dass diese *Data* der Rechnung durch Beobachtung und Messung gegebene Grössen seien. Ich will nicht unterlassen zu bemerken, dass bei dem Material, welches ihm vorlag, Keppler allerdings den hier gezeigten Weg nicht gehen konnte. Denn es wird dabei vorausgesetzt, dass die Beobachtungen die zusammengehörigen Werthe von v und r geben. Das war aber bei Keppler nicht der Fall. Die Tychonischen Beobachtungen gaben ihm jedesmal nur entweder das Eine oder das Andere. Die Werthe von v wurden durch Beobachtungen in der Opposition und die Werthe von r durch Beobachtungen ausser der Opposition gegeben. Dies ist jedoch für meinen Zweck ganz gleichgiltig. Denn es handelt sich hier nur um eine Regel, die zur Entdeckung von Naturgesetzen führt, nicht um die Bestimmung der Fälle, wo diese Regel ihren Dienst versagt.

so ist

$$\left.\begin{aligned} a_1 = &+ 0{,}75058 \,.\, 0{,}09265 \,.\, \frac{r_1}{N_1} \,. \\ &- 0{,}09265 \,.\, \frac{r_2}{N_2} \\ &+ 0{,}75058 \,.\, \frac{r_3}{N_3} \\ &- 0{,}84323 \,.\, \frac{r_4}{N_4} \\ &- 0{,}75058 \,.\, 0{,}09265 \,.\, \frac{r_5}{N_5} \,. \end{aligned}\right\} \ldots 1 \,.$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 = &\; 0{,}75058 \,.\, 0{,}09265 - 0{,}84323 \,.\, \frac{r_1}{N_1} \\ &+ \frac{r_2}{N_2} \\ &- \frac{r_3}{N_3} \\ &+ \frac{r_4}{N_4} - r_4 \\ &+ 0{,}84323 + 0{,}75058 \,.\, 0{,}09265 \,.\, \frac{r_5}{N_5} \end{aligned}\right\} \ldots 2 \,.$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 = &+ 0{,}15677 \,.\, \frac{r_1}{N_1} \\ &+ 0{,}09265 \,.\, \frac{r_2}{N_2} \\ &- 0{,}75058 \,.\, \frac{r_3}{N_3} \\ &+ 0{,}84323 \,.\, \frac{r_4}{N_4} \\ &- 1{,}84323 \,.\, \frac{r_5}{N_5} \end{aligned}\right\} \ldots 3 \,.$$

und

$$a_4 = \left.\begin{array}{l} +\dfrac{r_1}{N_1} \\ -\dfrac{r_2}{N_2} \\ +\dfrac{r_3}{N_3} \\ -\dfrac{r_4}{N_4} \\ +\dfrac{r_5}{N_5} \end{array}\right\} \ldots 4\,.$$

Führt man diese Rechnungen logarithmisch aus und ordnet jede Horizontalreihe nach steigenden Potenzen von x, so kommt:

$$r =$$

$$1{,}51042 \left.\begin{array}{r} +\ 0{,}255758 \\ -\ 0{,}697520 \\ +18{,}92163 \\ -18{,}314796 \\ -\ 0{,}0251285 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{r} -\ 2{,}84547 \\ +\ 7{,}52855 \\ -25{,}20934 \\ +20{,}20939 \\ +\ 0{,}32983 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r} +\ 0{,}5765671 \\ +\ 0{,}6975203 \\ -18{,}921630 \\ +18{,}314797 \\ -\ 0{,}6660467 \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{r} +\ 3{,}677790 \\ -\ 7{,}528552 \\ +25{,}20934 \\ -21{,}719810 \\ +\ 0{,}3613475 \end{array}\right\} x^4$$

Mithin, wenn man die positiven und negativen Glieder zusammenzieht

$$r =$$

$$1{,}51042 + 0{,}139944x + 0{,}01296x^2 + 0{,}0012077x^3 + 0{,}000115x^4 \text{*)}$$

Bilden wir nun die Quotienten

$\dfrac{a_1}{a_0}$, $\dfrac{a^2}{a_1}$, $\dfrac{a_3}{a_2}$, $\dfrac{a_4}{a_3}$, indem wir die Divisionen soweit ausführen, als die Anzahl und die Sicherheit der vorhandenen Decimalstellen gestattet, so bekommen wir:

$$\frac{0{,}139944}{1{,}51042} = 0{,}09265.$$

*) Man darf nicht vergessen, dass in der Gleichung $r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots x$ keine willkührliche und wachsende Variabele, sondern ein Cosinus ist, also eine periodische Grösse, die zwischen den Grenzen $+1$ und -1 hin und her oscillirt. Also ist die Summe der Reihe selbst periodisch.

$$\frac{0{,}01296}{0{,}13994} = 0{,}0926\,..$$

$$\frac{0{,}0012077}{0{,}01296} = 0{,}09\,....$$

$$\frac{0{,}000115}{0{,}001207} = 0{,}09\,....$$

Dr. Kronfeld hat diese Rechnungen ohne Logarithmen bloss mit Zahlen wiederholt und weiter fortgesetzt und zwar für folgende drei Fälle:

1. Data der Rechnung:

$r_1 = 1{,}66465$	$x_1 = 1.$
$r_2 = 1{,}52350$	$x_2 = 0{,}0926485067$
$r_3 = 1{,}51042\ 2663$	$x_3 = 0.$
$r_4 = 1{,}38235$	$x_4' = -1.$

Hier ist

$$N_1 = +\ 1{,}8147029866$$
$$N_2 = -\ 0{,}0918532354$$
$$N_3 = +\ 0{,}0926485067$$
$$N_4 = -\ 2{,}1852970134$$

$$\frac{r_1}{N_1} = +\ 0{,}9173126469$$

$$\frac{r_2}{N_2} = -\ 16{,}5862420872.$$

$$\frac{r_3}{N_3} = +\ 16{,}3027200014.$$

$$\frac{r_4}{N_4} = -\ 0{,}6325684754.$$

Dies giebt

$$r = \left.\begin{matrix} 0 & -\ 0{,}0849876469 \\ 0 & +\ 16{,}5862420872 \\ 1{,}51042 & -\ 16{,}3027200014 \\ 0 & -\ 0{,}0586065246 \end{matrix}\right\} x \quad \left.\begin{matrix} +\ \tfrac{1}{2}.\ 1{,}66465 \\ 0 \\ -\ 1{,}51042 \\ +\ \tfrac{1}{2}.\ 1{,}38235 \end{matrix}\right\} x^2 \quad \left.\begin{matrix} +\ 0{,}9173126469 \\ -\ 16{,}5862420872 \\ +\ 16{,}3027200014 \\ -\ 0{,}6325684754 \end{matrix}\right\} x^3$$

oder zusammengezogen

$$r = 1{,}51042 + 0{,}1399279143x + 0{,}013078x^2 + 0{,}0012220857x^3.$$

also

$$\frac{a_1}{a_0} = 0{,}09264, \quad \frac{a_2}{a_1} = 0{,}09\ldots, \quad \frac{a_3}{a_2} = 0{,}09\ \ldots$$

2. Data:

$r_1 = 1{,}66465$	$x_1 = 1{,}0000000000$
$r_2 = 1{,}623308122$	$x_2 = 0{,}7505828157$
$r_3 = 1{,}52350$	$x_3 = 0{,}0926485067$
$r_4 = 1{,}510422663$	$x_4 = 0{,}0000000000$
$r_5 = 1{,}38235$	$x_5 = -1{,}0000000000$

Hieraus

$$N_1 = +\ 0{,}45261810926$$
$$N_2 = -\ 0{,}21562056724$$
$$N_3 = +\ 0{,}060433395006$$
$$N_4 = -\ 0{,}069540377029$$
$$N_5 = +\ 3{,}82554339886$$

$$\frac{r_1}{N_1} = +\ \ 3{,}67782456$$

$$\frac{r_2}{N_2} = -\ \ 7{,}52854026$$

$$\frac{r_3}{N_3} = +\ 25{,}20957162$$

$$\frac{r_4}{N_4} = -\ 21{,}72008159$$

$$\frac{r_5}{N_5} = +\ \ 0{,}36134735$$

und folglich

$$r =$$

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}000000+\ 0{,}25575731\\ 0{,}000000-\ 0{,}69750813\\ 0{,}000000+18{,}92187125\\ 1{,}510422-18{,}31505312\\ 0{,}000000-\ 0{,}02512823\end{array}\right\} x \left.\begin{array}{r} -\ 2{,}84549956\\ +\ 7{,}52854026\\ -25{,}20957162\\ +20{,}20965893\\ +\ 0{,}32982763\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{r} +\ 0{,}57656769\\ +\ 0{,}69750801\\ -18{,}92187125\\ +18{,}31505312\\ -\ 0{,}66604675\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{r} +\ 3{,}67782456\\ -\ 7{,}52854026\\ +25{,}20957162\\ -21{,}72008159\\ +\ 0{,}36134735\end{array}\right\} x^4$$

und zusammengezogen

$$r =$$

$$1{,}51042266 + 0{,}13993908.x + 0{,}01295564.x^2 + 0{,}00121082.x^3 + 0{,}00012168.x^4$$

also

$$\frac{a_1}{a_0} = 0{,}092648, \quad \frac{a_2}{a_1} = 0{,}0926\ldots, \quad \frac{a_3}{a_2} = 0{,}09\ \ldots.$$

3) Endlich hat Dr. Kronfeld entsprechend der excentrischen Anomalie $E = 30^0$ noch ein Elementenpaar eingeschoben und die Rechnung für sechs zusammengehörige Werthe ausgeführt. Die Zusammenstellung dieser Rechnung zeigt die beigefügte Tafel. Man erhält hier als Resultat:

$$r = 1{,}51042266 + 0{,}13993834x + 0{,}01296354x^2$$
$$+ 0{,}00119951x^3 + 0{,}00011144x^4 + 0{,}00001217x^5\ ^*).$$

folglich

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{0{,}13993834}{1{,}5104227} = 0{,}0926485$$
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{0{,}01296354}{0{,}1399383} = 0{,}09264\ .$$
$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{0{,}00119951}{0{,}0129635} = 0{,}0926\ .\ .$$
$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{0{,}00011144}{0{,}0011995} = 0{,}092\ .\ .\ .$$

Man ersieht hieraus, dass je weiter man diese Rechnung fortsetzt, für desto mehr Glieder der Quotient, welchen man erhält, wenn man jedes Glied durch sein vorhergehendes dividirt, der beständigen Zahl 0,092648 gleich kommt. Setzt man nun diese Zahl, den gemeinschaftlichen Werth jener Quotienten $= e$, so ist

$$r = a_0\,(1 + ex + e^2x^2 + e^3x^3 + e^4x^4 + \ldots\ldots)$$

Die Coefficienten bilden also eine geometrische Reihe. Bedenkt man nun, dass diese Reihe eigentlich unendlich ist und nur zum Behuf der numerischen Berechnung mit dem n^{ten} Gliede abgebrochen wurde, so erhält man als Summe dieser Reihe

$$r = a_0\,\frac{1}{1 - ex}$$

*) Erhebt man die Excentricität 0,0926485 successive zur zweiten, dritten, vierten Potenz und multiplicirt durchgängig mit dem Parameter 1,5101227, so erhält man

$$a_1 = 0{,}13993838,\qquad a_2 = 0{,}0129650835$$
$$a_3 = 0{,}0012011955,\qquad a_4 = 0{,}000111289$$
$$a_5 = 0{,}00001031076.$$

Dies vergleicht sich von selbst mit obigen Zahlen.

und wenn man für die Abscisse x den Cosinus von v wieder einführt und für a_0 die gebräuchliche Bezeichnung p setzt:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos v}$$

die Polargleichung der Ellipse.

Die Bestimmung der Funktionsform oder, wie Whewell sagt, die Bildung der *Formula* erfolgt hier durch die Summirung einer Reihe, welche man durch die Lagrangesche Interpolationsformel erhält und die Bestimmung der Coefficienten dieser Reihe wird durch die Verbindung der Lagrangeschen Interpolationsformel mit dem Mac Laurinschen Theorem bewirkt. Dies vergleicht sich sehr genau mit den hier in Frage stehenden Begriffen. Setzt man nämlich

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist hier y das Ganze, a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2$ u. s. f. sind die Theile des Ganzen und $f(x)$ ist die Form des Ganzen, die durch die Induction gesucht wird und für deren Auffindung wir jetzt eine Regel haben.

Für unsern Fall $r = \frac{p}{1 - e \cos v} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ lässt die Quotientenbildung das Coefficientengesetz sogleich erkennen, da der Quotient eine beständige Grösse ist. Wäre nun aber dieser Quotient veränderlich, so käme es darauf an, das Gesetz seiner Veränderung zu entdecken. Dazu nun dient der Mac Laurinsche Satz als Leitfaden. Ohne diesen würde man über die etwa vorzunehmenden Combinationen der Coefficienten völlig im Dunkel sein.

Da nämlich nach dem Theorem des Mac Laurin

$$a_0 = f(o),\; a_1 = \frac{f'(o)}{1},\; a_2 = \frac{f''(o)}{1.\,2.} \ldots$$

sein muss, so ist umgekehrt

$$f(o) = a_0,\; f'(o) = 1a_1,\; f''(o) = 1.2a_2,\; \ldots.$$

und hieraus erfährt man die Werthe, welche die Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. f. für $x = o$ annehmen. Vergleicht man sie nun mit einem Verzeichnisse der Differentialquotienten verschiedener Functionen, so wird man gewiss in vielen Fällen leicht in der Tabelle eine Function finden, von

der $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$ u. s. f. mit a_0, $1.a_1$, $1.2a_2$ übereinstimmen und dann ist $f(x)$ die gesuchte Function. Anstatt also allerhand nutzlose Combinationen der Coefficienten zu versuchen und es dem Zufall überlassen zu müssen, ob man diejenige Combination trifft (wie oben $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_1}$ ....), aus der man das Gesetz ersieht, besteht kraft des Mac Laurinschen Theorems das Problem nur in der Vergleichung von a_0, $1.a_1$, $1.2.a_2$, $1.2.3a_3$, ... mit den Zahlen einer Tabelle der Differentialquotienten. *) Dies ist nach einer treffenden Bemerkung meines Freundes Schlömilch, dem ich die Idee dieser Verbindung des Mac Laurinschen Theorems mit der Lagrangeschen Interpolationsformel verdanke, der grosse Unterschied zwischen dem rathlosen Herumtappen in völliger Dunkelheit und dem planmässigen Suchen in der Dämmerung.

---

*) Machen wir davon die Anwendung auf unsern obigen Fall d. h. entwickeln wir

$$r = a_0 \frac{1}{1-ex} = a_0 f(x)$$

nach dem Mac Laurinschen Lehrsatz

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(o)}{1} x + \frac{f''(o)}{1.\,2} x^2 + \frac{f'''(o)}{1.\,2.\,3} x^3 + \ldots\ldots$$

so ist

$$D^n\left(\frac{1}{1-ex}\right) = \frac{1.\,2.\,3\,\ldots\,n.e^n}{(1-ex)^{n+1}}$$

also

$$D^0 = \frac{1}{1-ex}\quad,\quad D^1 = \frac{1.e}{(1-ex)^2}$$

und für $x = o$

$$f(o) = 1 \qquad f'(o) = e$$

$$D^2 = \frac{1.\,2\,e^2}{(1-ex)^3}\quad,\quad D^3 = \frac{1.\,2.\,3\,e^3}{(1-ex)^4}$$

und für $x = o$

$$f''(o) = 1.\,2\,e^2\quad,\quad f'''(o) = 1.\,2.\,3\,e^3 \text{ u. s. f.}$$

folglich

$$a_0 f(x) = a_0\,(1 + ex + e^2x^2 + e^3x^3 + \ldots\ldots).$$

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

r_2 99344136$_{269}$

r_3 95084477$_{091}$

95150740$_{780}$

30335879$_{831}$

7147990$_{090}$

95874300$_{619}$

$\ldots x_3 x_4 x_5 x_2 + x_3 x_4 x_5 x_6) x - x_2 x_3 x_4 x_5 x_2 \; . \; r_1$

$\ldots x_3 x_4 x_5 x_2 + x_3 x_4 x_5 x_2) x - x_1 x_3 x_4 x_5 x_2 \; . \; r_2$

$\ldots x_2 x_4 x_5 x_2 + x_2 x_4 x_5 x_6) x - x_1 x_2 x_4 x_5 x_2 \; . \; r_3$

$\ldots x_2 x_3 x_5 x_2 + x_2 x_3 x_5 x_2) x - x_1 x_2 x_3 x_5 x_2 \; . \; r_4$

$\ldots x_2 x_3 x_4 x_6 + x_2 x_3 x_4 x_2) x - x_1 x_2 x_3 x_4 x_2 \; . \; r_5$

$\ldots x_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5) x - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \; . \; r_6$

=

−

+

−

+

−

−

99

6